

# THESE

présentée au

**Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du CNRS**

en vue de l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)**

Spécialité: **AUTOMATIQUE**

par

**Pedro Luis DIAS PERES**

Engenheiro Eletricista - FEC - UNICAMP ( Brésil)  
Mestre em Engenharia Elétrica - FEC - UNICAMP (Brésil)

---

## **SUR LA ROBUSTESSE DES SYSTEMES LINEAIRES: APPROCHE PAR PROGRAMMATION LINEAIRE**

---

*Soutenue le 4 Décembre 1989 devant le jury:*

MM.	J. DESCUSSE	-	Président
	H. ABOU-KANDIL	}	Examineurs
	M. COURDESSES		
	J.C. HENNET		
	A. TITLI		
	J. BERNUSSOU	-	Directeur de Recherche

*A mes parents*



*Vaga um céu indeciso entre nuvens cansadas,  
Onde está o insofrido? O mal das almas  
Quase parece um bem na linha das calçadas,  
A palavra se inutiliza em brisas calmas*

*De andantes, onde estou! No entanto é dia claro ...  
Toda forma de ação se esvai numa atonia,  
Há desamparo e aceitação do desamparo.*

*— Essa história de amar quando começa o dia ...*

**Mário de Andrade, *Lira Paulistana***



## Avant-propos

*Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du CNRS. Je remercie son directeur, Monsieur Alain Costes, de m'y avoir accueilli. Je suis reconnaissant au "Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico" (CNPq - Brésil) et au CEFI/CESELEC (France) pour le soutien financier qui m'a été octroyé.*

*Je tiens à remercier spécialement Monsieur Jacques Bernussou, Directeur de Recherche au LAAS/CNRS et responsable du groupe "Décentralisation, Hiérarchisation et Parallélisme en Optimisation et Commande", qui a encadré ce travail, pour son aide précieuse et son amitié dont il m'a honoré durant ces années de travail en commun.*

*Je suis très reconnaissant à Monsieur José Claudio Geromel, Professeur à l'Université de Campinas, troisième personnage dans la coopération dont cette thèse est l'aboutissement.*

*Je remercie également Monsieur Jacques Descusse, Directeur de Recherche au CNRS et Directeur du Laboratoire d'Automatique de Nantes, d'avoir accepté la présidence du jury de cette thèse.*

*Je remercie Monsieur Hisham Abou-Kandil, Maître de Conférences à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, et Monsieur André Titli, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, d'avoir accepté de juger mon travail et d'en être rapporteurs.*

*Je tiens à remercier Monsieur Michel Courdesses, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, et Monsieur Jean-Claude Hennet, Chargé de Recherche au LAAS/CNRS, pour leur participation à cette Commission d'Examen.*

*Je remercie aussi Antoine Missier, Jean-Loup Farges et Germain Garcia pour leur lecture critique, et tout particulièrement Rafael Santos Mendes et Jorge Dantas de Melo pour leur amitié et l'intérêt scientifique apporté à ce travail tout au long de mon séjour.*

*Enfin, j'adresse mes sympathies à tous mes camarades du LAAS, dont les noms*

*constitueraient une liste trop longue, pour l'ambiance chaleureuse et cordiale dans laquelle ce travail s'est déroulé.*

# Sommaire

<b>Introduction Générale</b>	<b>13</b>
<b>1 Sur la Commande Robuste — Approche par Equation d'Etat</b>	<b>17</b>
1.1 Introduction . . . . .	17
1.2 Commande à Coût Garanti . . . . .	19
1.3 Méthodes de Lyapunov . . . . .	21
1.4 Mesures de Robustesse . . . . .	23
1.5 Etude à Partir de l'Equation Caractéristique . . . . .	25
1.6 Stabilisabilité Quadratique . . . . .	28
1.7 Conclusion . . . . .	37
<b>2 Stabilisabilité et Commande Robuste — Systèmes Continus</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction . . . . .	39
2.2 Stabilisabilité de Systèmes Linéaires . . . . .	40
2.2.1 Condition Nécessaire et Suffisante de Stabilisabilité . . . . .	41
2.2.2 Problème d'Optimisation Associé . . . . .	43
2.2.3 Algorithme Numérique . . . . .	47
2.2.4 Convergence de l'Algorithme . . . . .	48
2.2.5 Détermination d'un Gain Stabilisant . . . . .	50
2.2.6 Equation de Riccati . . . . .	51
2.2.7 Commande Décentralisée . . . . .	52
2.3 Incertitude sur la Matrice $A$ . . . . .	53
2.3.1 Condition Nécessaire et Suffisante de Stabilisabilité Quadra- tique . . . . .	54
2.3.2 Equation de Riccati . . . . .	57
2.3.3 Commande Décentralisée . . . . .	57
2.3.4 Problème d'Optimisation et Algorithme . . . . .	58
2.4 Systèmes Avec $A$ et $B$ Incertains . . . . .	59
2.4.1 Condition Nécessaire et Suffisante . . . . .	61
2.4.2 Problème d'Optimisation et Algorithme . . . . .	63
2.5 Formulation Dynamique Etendue . . . . .	66
2.5.1 Problème d'Optimisation et Algorithme . . . . .	70
2.5.2 Equation de Riccati . . . . .	72

2.5.3	Commande Décentralisée . . . . .	73
2.6	Conclusion . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Stabilisabilité et Commande Robuste — Systèmes Discrets</b>	<b>77</b>
3.1	Introduction . . . . .	77
3.2	Stabilisabilité . . . . .	78
3.3	Systèmes Incertains . . . . .	84
3.4	Conclusion . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Exemples Numériques</b>	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	89
4.2	Systèmes Continus — Matrice $A$ Incertaine . . . . .	90
4.2.1	Exemple Académique . . . . .	90
4.2.2	Problème de Commande d'un Satellite . . . . .	92
4.3	Systèmes Continus — $A$ et $B$ Incertains . . . . .	94
4.3.1	Exemple Académique . . . . .	94
4.3.2	Commande Robuste d'un Hélicoptère . . . . .	95
4.3.3	Avion de Chasse . . . . .	99
4.3.4	Dépendance Entre Paramètres . . . . .	100
4.4	Commande Décentralisée . . . . .	102
4.4.1	Commande d'un Manipulateur Mécanique . . . . .	102
4.5	Formulation de Dynamique Etendue . . . . .	107
4.5.1	Systèmes Continus — $A$ et $B$ incertains . . . . .	107
4.5.2	Stabilisation de Quatre Points de Fonctionnement . . . . .	107
4.5.3	Commande Décentralisée . . . . .	111
4.6	Systèmes Discrets . . . . .	115
4.7	Conclusion . . . . .	117
	<b>Conclusion</b>	<b>121</b>
	<b>Références</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Quelques Concepts en Optimisation</b>	<b>131</b>
A.1	Introduction . . . . .	131
A.2	Convexité d'Ensembles . . . . .	131
A.3	Fonctions de Matrices . . . . .	132
A.4	Conclusion . . . . .	135

## NOTATION

$A, B, \dots$	—	matrices
$A'$	—	matrice transposée de $A$
$\mathbf{1}$	—	matrice unité
$\lambda_{\max}(A)$	—	valeur propre maximale de $A$
$\lambda_{\min}(A)$	—	valeur propre minimale de $A$
$\sigma_{\max}(A)$	—	valeur singulière maximale de $A$
$\ A\ $	—	norme de $A$ . Ici, on utilisera $\ A\  = \sqrt{\lambda_{\max}(A'A)}$
$A > (\geq) 0$	—	$A$ symétrique (semi) définie positive
$A > (\geq) B$	—	$A - B$ symétrique (semi) définie positive



## Introduction Générale

Dès l'avènement de la première machine, les problèmes de commande ont attiré l'attention des ingénieurs et scientifiques qui se sont attachés à déterminer des stimulations qui assurent un fonctionnement satisfaisant des systèmes. Le but rapidement recherché fut que cette action se produise "toute seule", sans interférence avec l'utilisateur, obéissant à des principes d'auto-régulation. Ainsi sont nées les premières commandes de contre-réaction. Les mathématiques ont apporté leur contribution, de manière à effectuer les études et les projets de commande de machines d'abord sur des modèles mathématiques, à partir d'équations qui représentaient les mouvements, avant de passer à l'implantation réelle. Les systèmes différentiels étant un mode de représentation généralisé, applicable dans divers domaines, la science mathématique pour l'analyse, et l'automatique pour la synthèse, ont eu pour but l'étude des propriétés de telles représentations.

Parmi les points abordés, l'étude des propriétés de stabilité a toujours représenté un domaine important. Si l'on peut considérer qu'il a été ouvert dès les premiers travaux sur les équations différentielles, on peut affirmer qu'un des travaux qui a hissé cette problématique au rang de domaine scientifique est certainement celui de Lyapunov publié en 1893 [32]. Très générale, la théorie de Lyapunov part d'un principe simple: associer une mesure à l'état d'un système à l'instant de temps  $t$ , cette mesure étant, par exemple, une énergie ou une distance entre cet état et un point d'équilibre du système. Si sa valeur diminue au cours du temps alors le système est stable.

La modélisation est une étape importante pour la maîtrise d'un système. Un système peut être très complexe et avoir un modèle très simple qui décrit bien son comportement, ou réciproquement, être apparemment simple et nécessiter un modèle complexe. Du fait de sa simplicité et également son applicabilité assez large, la modélisation linéaire a fait l'objet de nombreux travaux. Une remarque: la théorie de Lyapunov, appliquée aux systèmes linéaires, fournit des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. La complication naturelle des machines et systèmes étant écartée des études théoriques, la "théorie des systèmes linéaires"

a pu évoluer rapidement: tant sous l'aspect de représentation temporelle (espace d'état) que de représentations entrée-sortie, fréquentielle, fonctions de transfert, etc.

En commande optimale de systèmes linéaires, l'approche Linéaire Quadratique LQ, qui consiste à rechercher une commande qui minimise un critère quadratique en l'état et la commande, possède une solution très élégante et efficace consistant en un retour d'état, donné par la résolution d'une équation matricielle de Riccati. Dans le cas stationnaire d'horizon infini, marges de gain et de phase sont associées à une telle solution.

Tout ce progrès n'a pourtant pas complètement épuisé les problèmes relatifs aux systèmes linéaires, notamment le cas, intéressant en pratique, de systèmes dont le modèle n'est pas précisément connu. Ce problème n'a pas encore reçu de solution entièrement satisfaisante et un des points faibles réside dans le fait que l'hypothèse de pleine connaissance des paramètres est prise dès le départ, alors que dans le cas général les paramètres physiques sont mal connus.

Le concept de robustesse est alors apparu; la robustesse est la qualité qui possède à un système qui est peu affecté par des incertitudes et perturbations inhérentes ou extérieures au système. Un système robuste est celui qui garde ses caractéristiques et qualités (stabilité, performance, etc.) même sous l'influence de perturbations. Une commande robuste doit donc garantir au système toutes ces propriétés, soit en prenant en compte, au niveau de la synthèse, les incertitudes, soit alors parce qu'elle est conçue de façon à garantir certaines marges de stabilité et/ou performance.

Le problème de la commande robuste vis-à-vis de variations paramétriques des systèmes linéaires est un problème actuel. Comment peut-on incorporer à la procédure de synthèse d'une commande les incertitudes paramétriques? A partir d'une certaine connaissance a priori des incertitudes, on peut tenter d'obtenir une commande qui garantit la stabilité pour cet ensemble d'incertitudes, à laquelle on peut ajouter d'autres exigences comme par exemple une "norme pas trop grande" sur le gain. Si l'on utilise la théorie de Lyapunov, la question qui se pose est celle de trouver une matrice de Lyapunov et un gain tels que le système en boucle fermée soit stable pour tout l'ensemble d'incertitudes considéré. Ou alors d'établir d'abord une matrice de Lyapunov et ensuite, à partir de celle-ci, obtenir un gain robuste. C'est à ce genre de questions que nous avons consacré ce mémoire.

Ce travail est une contribution au domaine de la commande robuste et de l'analyse de stabilité pour les systèmes linéaires incertains. La représentation par équation d'état a été adoptée et la théorie de Lyapunov utilisée pour garantir la

stabilité.

Les systèmes linéaires incertains considérés possèdent des domaines d'incertitude paramétriques par hypothèse convexes. Dans la représentation d'équation d'état, la matrice dynamique ainsi que la matrice de commande peuvent être affectées par des paramètres incertains. L'approche consiste, à partir d'une fonction quadratique de Lyapunov, à déterminer une commande qui prend en compte les variations permises d'incertitude et qui garantit la stabilité du système en boucle fermée. La commande peut satisfaire d'autres exigences comme par exemple la contrainte structurelle de décentralisation. Les systèmes continus et discrets ont été analysés.

La méthode de recherche de cette commande fait appel à des techniques de programmation mathématique, notamment la programmation linéaire. Des procédures numériques performantes ont été développées pour accomplir cette tâche.

Ce mémoire est articulé en quatre chapitres, comme suit:

Le premier chapitre trace un panorama général des travaux engagés ces dernières années sur la commande robuste et la stabilité sous incertitudes pour les systèmes linéaires décrits par équation d'état. Plusieurs méthodes, la plupart utilisant la théorie de Lyapunov, définissent des théorèmes et des procédures à suivre pour réaliser une commande robuste. Des approches de type Riccati essaient d'adapter le problème linéaire quadratique et sa solution aux incertitudes; d'autres partent du polynôme caractéristique du système pour obtenir des résultats concernant le lieu des racines. Les mesures de robustesse surgissent, et finalement le concept de stabilisabilité quadratique (la capacité d'un système d'être stable en admettant une fonction quadratique de Lyapunov unique pour toutes les incertitudes permises) vient poser le problème plutôt comme la recherche d'une fonction de Lyapunov, à partir de laquelle un gain stabilisant a été déterminé.

Le chapitre 2 présente ensuite le chemin que nous avons suivi pour notre propre contribution, à partir de la base théorique existante dont le premier chapitre donne un aperçu. Les systèmes linéaires continus sont analysés, et les incertitudes sont introduites "petit-à-petit". Ainsi, la technique proposée pour la recherche d'une commande se révèle déjà performante pour des systèmes précisément connus. Toutes les considérations concernant les procédures numériques et les algorithmes (réutilisables pour les systèmes incertains, par la suite) sont présentées, ainsi que l'analyse de convergence et la prise en compte de la contrainte de décentralisation. L'incertitude atteint d'abord la matrice dynamique du système, puis la matrice d'entrée. Les procédures, algorithmes et théorèmes traitant les deux cas sont donnés. Pour terminer, une formulation dynamique étendue regroupe de manière synthétique les résultats et permet la prise en compte de la décentralisation et de

la norme du gain robuste obtenu dans la procédure de recherche d'une solution du problème.

Les systèmes linéaires discrets sont abordés au troisième chapitre. Des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisabilité quadratique sont établies, à partir d'une formulation étendue. La décentralisation ainsi que la minimisation de la norme du gain robuste restent facilement incorporables aux procédures.

Les exemples numériques, avec des lieux des racines et quelques simulations composent le chapitre 4. La plupart des exemples est empruntée aux articles parus récemment dans les revues spécialisées. Ils illustrent les capacités des méthodes développées et effectuent des comparaisons avec d'autres méthodes.

Enfin, une annexe présente quelques propriétés sur la convexité et autres concepts d'optimisation, utiles pour la compréhension de la théorie développée dans les chapitres 2 et 3.

# Chapitre 1

## Sur la Commande Robuste — Approche par Equation d'Etat

### 1.1 Introduction

On s'intéresse aux systèmes dynamiques linéaires décrits par des équations d'état, susceptibles de présenter un niveau d'incertitude dans leur modélisation (paramètres non parfaitement identifiés ou à variations inconnues). Ces systèmes sont en général de la forme

$$\dot{x} = A(r)x + B(s)u \quad (1.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des variables d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des variables de commande,  $A(r) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matrice dynamique du système,  $B(s) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  la matrice d'entrée,  $r \in \mathbb{R}^r$  et  $s \in \mathbb{R}^s$  sont des vecteurs qui représentent les incertitudes affectant respectivement la matrice dynamique et la matrice d'entrée. Ces incertitudes  $r \in \mathcal{R}$  et  $s \in \mathcal{S}$  sont considérées comme des fonctions continues du temps. Leur présence et leur façon d'intervenir sur le système ont fait l'objet de différentes hypothèses, qui seront discutées ultérieurement.

Le système (1.1) suscite quelques questions et soulève quelques problèmes auxquels est attaché un intérêt pratique certain. Il est en effet important de posséder des méthodes d'analyse permettant d'évaluer les performances d'un système de commande vis-à-vis des perturbations et incertitudes affectant tout système physique. En second lieu, il est non moins important de disposer de méthodes de synthèse permettant la détermination de commandes assurant un niveau de performance acceptable.

Au niveau de l'analyse, le problème fondamental est celui de la détermination de conditions assurant la stabilité du système (1.1)  $r$  et  $s$  prenant n'importe

quelle valeur dans leur domaine d'incertitude. Pour ce problème plusieurs classes d'incertitudes sont en général considérées (structurées ou non, additives, ...). Chacune de ses classes est caractérisée par une description particulière de l'incertitude, qui conduit à des conditions, en général, suffisantes.

Au niveau de la synthèse, la question fondamentale est bien sûr celle de l'obtention d'outils effectifs permettant la détermination de commandes qui garantissent la stabilité de toute réalisation du système (1.1) dans son domaine d'incertitude. L'exigence minimale de stabilité peut être renforcée par l'association de critères de performance supplémentaires: critères de temps de réponse, économiques, contraintes de structure, ....

Ces questions et plusieurs autres ont été abordées ces dernières années, et dans ce chapitre nous allons exposer les lignes générales de quelques travaux. Cela permettra de définir précisément l'axe de recherche du travail décrit dans ce mémoire et de le situer dans cet ensemble, mettant alors en évidence les contributions que nous avons apportées.

La représentation sous forme d'équation d'état, qui est celle adoptée dans ce mémoire, est naturelle pour traiter des incertitudes dites "structurées", définies directement sur les paramètres du modèle alors que les méthodes "fréquentielles" (par exemple  $H_\infty$ ) sont, elles, plus naturelles pour la prise en compte de dynamiques parasites, non modélisées et qui sont qualifiées d'incertitudes non structurées. Ces dernières ne sont pas prises en compte dans ce travail.

Nous présentons, en premier lieu, l'approche dite de "coût garanti", une des premières qui soient apparues dans la littérature (1972) et qui peut être classée dans les approches, classiques pour les systèmes linéaires, de type LQ (système linéaire - coût quadratique). Nous mentionnons ensuite un travail basé sur l'exploitation de l'équation de Lyapunov, utilisée à la fois pour tester la stabilité du système incertain et définir un gain stabilisant. Ce travail contenait en germe quelques idées reprises plus récemment dans le concept de stabilisabilité quadratique et qui fera d'ailleurs l'objet d'un assez long développement en fin de chapitre. Vient ensuite le rappel de quelques résultats portant sur l'utilisation d'indices de robustesse bâtis généralement à partir de valeurs propres intervenant dans l'équation de Lyapunov. Les résultats de Kharitonov ont naturellement entraîné à leur suite un grand nombre de travaux en robustesse, nous en donnerons un aperçu. Enfin, la stabilisabilité quadratique, concept introduit par Hollot et Barmish et son application à la stabilisation de systèmes incertains, est discutée en détail, car c'est une approche qui a suscité un nombre important d'articles ces dernières années et puis, de plus, constitue une bonne entrée en matière pour la présentation

de nos travaux.

## 1.2 Commande à Coût Garanti

En 1972, Chang et Peng [14] proposent une méthode appelée "commande à coût garanti"; le système linéaire étudié est donné par

$$\dot{x} = A(r)x + Bu \quad (1.2)$$

où  $r(t) \in \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}$  domaine fermé et borné. La matrice  $A(r)$ , par hypothèse, s'écrit

$$A(r) = A_0 + \sum_{i=1}^{n_r} r_i(t)A_i \quad (1.3)$$

avec  $-1 \leq r_i(t) \leq 1$ ,  $i = 1 \dots n_r$ . L'approche concerne donc uniquement les systèmes à dynamique incertaine. Une fonction "critère quadratique" est associée au système (1.2):

$$J(x, u, r) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x'Qx + u'Ru) dt \quad (1.4)$$

où les matrices  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  symétriques définies positives sont, respectivement, des matrices de pondération de l'état et de la commande.

L'approche consiste à déterminer, par "adaptation" du critère  $J$ , une commande qui assure un degré de sous-optimalité. C'est-à-dire que pour toute réalisation du système dans son domaine d'incertitude la valeur du critère (calculée en un point quelconque) restera au-dessous d'une borne  $J_{CG}$ , déterminée d'après la commande à coût garanti. Cette commande est telle que la valeur du critère (1.4) appartient à un voisinage de celle obtenue pour la commande optimale du système nominal. L'équation de Riccati associée au problème de commande optimale, pour un  $r$  donné, est

$$A(r)'P + PA(r) - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (1.5)$$

Elle est, bien sûr, dépendante du vecteur des paramètres inconnus  $r$ , de même que sa solution  $P$ . Chang et Peng proposent alors une solution de "coût garanti", où  $P$  serait la solution d'une pseudo-équation de Riccati:

$$A_0'P + PA_0 - PBR^{-1}B'P + Q + \mathcal{U}(P, A) = 0 \quad (1.6)$$

où  $U(P, A)$  est une borne supérieure des termes qui dans (1.6) apparaissent liés aux incertitudes paramétriques. Cette borne supérieure est définie comme suit:

$$x'U(P, A)x \geq x' \left[ \sum_{i=1}^{n_r} r_i (A_i' P + P A_i) \right] x \quad (1.7)$$

$$\forall x \neq 0 \in \mathfrak{R}^n \text{ et } \forall r_i \in [-1, 1]$$

Pour la borne  $U(P, A)$  ils choisissent

$$U(P, A) = \sum_{i=1}^{n_r} T_i | \Lambda_i | T_i' \quad (1.8)$$

où  $T_i$  est la matrice de transformation orthonormale qui diagonalise la matrice  $[A_i' P + P A_i]$  et donc

$$A_i' P + P A_i = T_i \Lambda_i T_i' \quad (1.9)$$

et  $| \Lambda_i |$  est la matrice des valeurs absolues des éléments de la matrice diagonale  $\Lambda_i$ . L'équation (1.6) ne présente plus de dépendance explicite par rapport aux paramètres  $r_i$ , mais le terme additionnel est dépendant de  $P$ , et la matrice  $P$  à son tour est dépendante de  $r$ . Chang et Peng proposent un algorithme itératif, où pour une matrice  $P$  donnée (solution du cas nominal,  $A = A_0$ ) la fonction  $U(P, A)$  est évaluée, et ensuite une nouvelle solution  $P_t$  est obtenue à partir de (1.6) et ainsi de suite. Il s'agit d'une approche relativement heuristique, car la convergence de l'algorithme n'a pas été démontrée. Néanmoins, si l'algorithme converge, alors le système dynamique décrit par (1.2) avec la commande linéaire  $u = -Kx$ ,  $K = R^{-1} B' P$ , est stable  $\forall r(t) \in \mathcal{R}$ . Une fonction de Lyapunov associée est donnée par  $v(x) = x' P x$  et la valeur du critère,  $\forall r \in \mathcal{R}$ , est bornée par le coût garanti  $J_{CG}$

$$J(x, u, r) \leq J_{CG} \triangleq \frac{1}{2} x(0)' P x(0) \quad (1.10)$$

L'idée de modifier l'équation de Riccati en vue de l'obtention d'un gain robuste pour un système incertain et aussi garantir une borne supérieure pour la fonction critère associée a été reprise dans d'autres publications ([50], [51]). Actuellement, on peut distinguer de nombreuses méthodes qui utilisent des équation de type Riccati; Noldus [33] en 1982 proposait une "équation de Riccati" paramétrée par un scalaire positif  $\epsilon$ , résolue itérativement pour atteindre une solution associée à

une commande robuste. Comme on verra par la suite, les résultats les plus récents sont obtenus à partir d'une caractérisation particulière de l'incertitude.

### 1.3 Méthodes de Lyapunov

Horisberger et Bélanger [21], en 1976, ont envisagé le problème de la stabilité d'un système linéaire autonome incertain ainsi que celui de la synthèse d'un régulateur robuste. Leur approche est fondée sur l'utilisation d'une équation de Lyapunov unique associée au système sous analyse. En ce sens, elle peut être considérée comme l'ancêtre des approches dites de stabilisabilité quadratique. Toutefois, comme nous le verrons, leur approche ne leur a pas permis d'énoncer une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique, qui a été sans doute une avance décisive d'un point de vue pratique (mise en œuvre de résolutions numériques) pour les problèmes de commande robuste.

Pour l'analyse de stabilité, le système considéré est donné par:

$$\dot{x} = A(r)x \quad (1.11)$$

où  $r$  est le vecteur des paramètres incertains. Chacune de ses composantes  $i$  satisfait

$$r_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, \quad i = 1 \dots n_r \quad (1.12)$$

Les éléments de la matrice  $A$  sont des fonctions linéaires par rapport à leurs arguments  $r_i$ .

Ainsi, le domaine  $\mathcal{R}$  des paramètres admissibles défini par (1.12) est un polyèdre convexe avec  $N = 2^{n_r}$  sommets, chacun associé à une matrice "sommets" qu'on appellera  $A_i$ . Une condition suffisante de stabilité du système (1.11) est donnée par l'existence d'une matrice symétrique définie positive  $P$  telle que,  $\forall r \in \mathcal{R}$ ,

$$A(r)'P + PA(r) < 0 \quad (1.13)$$

Ceci peut aussi s'exprimer, grâce à la convexité de l'ensemble  $\mathcal{R}$  et à la dépendance linéaire des éléments de  $A(\cdot)$ , par l'existence de  $P = P' > 0$  qui satisfait

$$A_i'P + PA_i < 0, \quad i = 1 \dots N \quad (1.14)$$

Evidemment, une condition nécessaire et suffisante pour le cas de paramètres in-

certaines mais non variables dans le temps est l'existence d'une matrice  $P = P' > 0$  pour chaque valeur possible de  $r \in \mathcal{R}$ , mais ceci est bien sûr non exploitable pratiquement. La vérification des équations (1.13) et (1.14) avec  $P = P' > 0$  unique a été désignée plus tard comme condition de stabilité quadratique (Hollot et Barmish [23], 1980).

Si on définit

$$h_i(P) \triangleq \lambda_{\max}[A_i'P + PA_i]$$

qui est une fonction convexe par rapport à  $P$  (voir annexe), alors on peut formuler d'une manière équivalente la condition décrite par (1.14). S'il existe  $P = P' > 0$  tel que

$$\min_{\|P\| \leq 1} \left\{ \max_{i=1 \dots N} [h_i(P)] \right\} < 0 \quad (1.15)$$

l'équation (1.13) est vérifiée. Il est facile de voir qu'exiger  $\|P\| \leq 1$  n'exclut pas une solution éventuelle.

Un des problèmes résolus dans [21] est celui de la recherche d'un domaine de stabilité dans l'espace des paramètres incertains  $r$ . Ceci est réalisé au moyen d'une procédure itérative qui, à partir d'un vecteur de paramètres  $r_0$  nominal assurant la stabilité du système, détermine par augmentation successive le "plus grand" domaine d'incertitude admissible par cette approche.

Pour le problème de la commande robuste, une procédure similaire est proposée. Tout d'abord, un gain linéaire stabilisant et une matrice de Lyapunov sont calculés pour le système nominal. Ensuite, itérativement, ce gain est modifié de façon à élargir le polyèdre d'incertitude (paramétré par un scalaire  $\epsilon$ ) tout en conservant la matrice de Lyapunov de départ.

En combinant les deux approches, à savoir recherche de la fonction de Lyapunov  $P$ , puis recherche de la matrice de retour d'état linéaire  $K$ , Horisberger et Bélanger ont défini un algorithme intéressant de synthèse. Toutefois, cette approche reste dépendante du fait que leur problème d'optimisation ne possède pas la propriété de convexité par rapport au couple  $(P, K)$ , alors qu'il existe, comme nous allons le voir par la suite, une approche que nous avons développée et qui fournit, avec la même formulation des incertitudes, une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique.

## 1.4 Mesures de Robustesse

Nombre de travaux ont porté sur des mesures quantitatives de robustesse qui permettent une estimation de marges de stabilité dans l'espace des paramètres. Elle est définie comme étant l'écart de la valeur des paramètres par rapport à leurs valeurs nominales, pour lequel la stabilité du système est préservée. Nous citerons quelques uns de ces travaux.

Patel et Toda [34] se sont préoccupés des systèmes décrits par

$$\dot{x} = Ax + f(x, t) \quad (1.16)$$

avec  $A$  asymptotiquement stable et  $f(x, t)$  une fonction non linéaire qui représente les perturbations,  $f(0, t) = 0 \forall t$ . A partir d'une fonction de Lyapunov  $v = x'Px$ , une condition suffisante de stabilité est donnée par le théorème suivant:

**Théorème 1.1** Le système (1.16) est stable si (condition suffisante)

$$\frac{\|f(x, t)\|}{\|x\|} \leq \mu \triangleq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad \forall x \neq 0 \in \mathfrak{R}^n, \forall t \quad (1.17)$$

où  $P = P' > 0$  est la solution de

$$A'P + PA + 2Q = 0 \quad (1.18)$$

avec  $Q$  une matrice symétrique définie positive quelconque.

Ce résultat peut être vérifié simplement par le calcul de la dérivée de la fonction de Lyapunov

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} \\ &= x'(A'P + PA)x + x'Pf(x, t) + f(x, t)'Px \\ &= -2x'Qx + x'Pf(x, t) + f(x, t)'Px \end{aligned} \quad (1.19)$$

et pour avoir  $\dot{v} \leq 0$  il faut forcément

$$2x'Qx \geq 2f(x, t)'Px \quad (1.20)$$

Avec les propriétés (voir [34])

$$x'Qx \geq \lambda_{\min}(Q)x'x$$

$$f(x, t)'Px \leq \|f(x, t)\| \cdot \lambda_{\max}(P) \cdot \|x\|$$

on obtient

$$\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2 \geq \lambda_{\max}(P) \cdot \|f(x, t)\| \cdot \|x\| \quad (1.21)$$

qui est une condition suffisante pour (1.20) et finalement

$$\frac{\|f(x, t)\|}{\|x\|} \leq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \triangleq \mu \quad (1.22)$$

Le paramètre  $\mu$  peut être considéré comme une mesure de robustesse; en effet, le système (1.16) sera stable pour toute perturbation  $f$  vérifiant

$$\|f(x, t)\| \leq \mu \|x\| \quad (1.23)$$

(condition de cône). Ce paramètre est fonction de la matrice  $Q$ . Un résultat intéressant donné par Patel et Toda est que le maximum pour  $\mu$  est obtenu lorsque  $Q$  est prise égale à la matrice identité ( $Q = \mathbf{1}$ ), et

$$\mu = \frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \equiv \frac{1}{\sigma_{\max}(P)} \quad (1.24)$$

où  $P$  est la solution de  $A'P + PA + 2\mathbf{1} = 0$ .

Pour le cas d'une perturbation linéaire  $f(x, t) = E(t)x$ , le système devient

$$\dot{x} = (A + E(t))x \quad (1.25)$$

et la condition suffisante de stabilité est

$$\|E(t)\| \leq \mu \quad (1.26)$$

Une autre condition suffisante de stabilité qui, quoique plus restrictive que (1.26), présente l'intérêt de donner des conditions individualisées pour chaque élément de la matrice  $E(t)$ , est donnée par

$$|e_{ij}| \leq \frac{\mu}{n} \quad (1.27)$$

$n$  étant la dimension de l'espace d'état, et  $e_{ij}$  sont des éléments de  $E(t)$ .

C'est partant de cette dernière condition que Yedavalli [53] a tenté d'améliorer

ce résultat, en considérant des connaissances a priori sur la nature de  $E(t)$ . Il propose une nouvelle mesure de robustesse  $\mu_Y$  donnée par

$$\mu_Y \triangleq \frac{1}{\sigma_{\max}[P_m U]_s} \quad (1.28)$$

où  $P_m$  est la matrice des valeurs absolues des éléments de  $P$ , solution de l'équation

$$A'P + PA + 2I = 0 \quad (1.29)$$

et la matrice  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est composée des éléments  $u_{ij}$  donnés par

$$\begin{cases} u_{ij} = 0 & \text{si } e_{ij} = 0 \\ u_{ij} = \frac{e_{ij}}{\epsilon}, & \text{où } |e_{ij}| \leq \epsilon_{ij} \text{ et } \epsilon \triangleq \max_{ij} \epsilon_{ij} \end{cases} \quad (1.30)$$

( $[\cdot]_s$  signifie la partie symétrique de  $[\cdot]$ ). Ainsi  $\mu_Y$  est une mesure de robustesse qui prend en compte les perturbations structurées. L'inconvénient de l'approche est qu'il n'a été possible de démontrer mathématiquement la supériorité de la borne  $\mu_Y$  que dans le cas  $P_m = P$ .

## 1.5 Etude à Partir de l'Equation Caractéristique

Une autre approche pour l'étude de la stabilité des systèmes linéaires soumis à des incertitudes paramétriques consiste à travailler directement sur l'équation caractéristique associée au système et sur la sensibilité de la localisation des racines (pôles) par rapport à ces incertitudes. Cette approche est étroitement liée aux travaux de Kharitonov [28] (et ceux qu'il a suscités) dont nous donnons un résumé succinct ci dessous.

Le résultat de Kharitonov porte donc sur l'analyse de stabilité de polynômes avec des coefficients incertains. Après avoir été publié dans le monde scientifique occidental (Barmish [3], Yeung et Wang [54]), son théorème a suscité de nombreuses discussions et a servi de base à l'avènement de nouveaux résultats. Le théorème de Kharithonov fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de polynômes (avec des coefficients incertains mais bornés) soit strictement Hurwitz invariante (c.a.d., toutes les racines ont des parties réelles strictement négatives).

**Théorème 1.2** Soit la famille de polynômes donnée par

$$p(\gamma) \triangleq a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + a_3\gamma^3 + \dots + a_{n-1}\gamma^{n-1} + a_n\gamma^n \quad (1.31)$$

où les coefficients  $a_i$ , positifs, sont incertains mais bornés

$$\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.32)$$

Cette famille est stable si et seulement si les quatre polynômes ci-dessous sont stables:

$$\begin{aligned} p_1(\gamma) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1\gamma + \underline{a}_2\gamma^2 + \underline{a}_3\gamma^3 + \bar{a}_4\gamma^4 + \bar{a}_5\gamma^5 + \dots \\ p_2(\gamma) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1\gamma + \underline{a}_2\gamma^2 + \bar{a}_3\gamma^3 + \bar{a}_4\gamma^4 + \underline{a}_5\gamma^5 + \dots \\ p_3(\gamma) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1\gamma + \bar{a}_2\gamma^2 + \underline{a}_3\gamma^3 + \underline{a}_4\gamma^4 + \bar{a}_5\gamma^5 + \dots \\ p_4(\gamma) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1\gamma + \bar{a}_2\gamma^2 + \bar{a}_3\gamma^3 + \bar{a}_4\gamma^4 + \underline{a}_5\gamma^5 + \dots \end{aligned} \quad (1.33)$$

Barmish [3] en 1984 avait déjà exploité ce résultat pour déterminer l'amplitude des perturbations admises sur les coefficients d'un polynôme pour qu'il ait toujours les racines du côté gauche du plan complexe. Une autre méthode, applicable aussi aux polynômes en  $z$  (systèmes discrets), qui détermine la plus grande hypersphère de stabilité centrée sur les valeurs nominales, a été proposée par Soh et al [46] en 1985.

En fait, lorsque l'on réduit l'étude de la sensibilité des valeurs propres d'une matrice  $A$  incertaine (maximum de  $n^2$  éléments incertains) à celle des racines de son équation caractéristique (le chiffre se réduit à  $n$ ), il peut se faire que les résultats obtenus directement à partir du théorème 1.2 soient conservatifs car ils correspondent en général à une forme appauvrie en terme d'information sur la structure de l'incertitude.

Notamment pour le cas de variations dépendantes des coefficients  $a_i$ , Wei et Yedavalli [52] proposent une alternative au théorème de Kharitonov. Anderson et al [1] montrent que des simplifications du même théorème sont possibles pour  $n = 3, 4, 5$  (avec 1, 2 et 3 polynômes extrêmes à considérer, respectivement).

Les actes du congrès CDC'87 (IEEE Conference on Decision and Control) comportent un assez grand nombre de communications portant sur des nouvelles implications et applications du théorème de Kharitonov, venant encore attester de son importance pour traiter des problèmes de robustesse. Parmi celles-ci citons

surtout Petersen [40] et Barmish [5].

Fu et Barmish [15] déterminent les bornes maximales pour des perturbations unidirectionnelles d'une matrice ou d'un polynôme autour des valeurs nominales, faisant le rapprochement entre les travaux de Kharitonov, les perturbations du type

$$A = A_0 + \alpha A_d$$

et les mesures de robustesse précédemment évoquées.

Enfin, les travaux relatifs à "l'approche Kharitonov" sont surtout dédiés à l'analyse des propriétés de stabilité de systèmes incertains. Quelques travaux sur la synthèse de régulateurs ont été entrepris à partir de la considération du polynôme caractéristique et de ses racines. On peut en préalable dire que ces travaux sont pour la plupart orientés vers la définition d'algorithmes numériques de type "lieu des racines", ce qui, pour des dimensions élevées, nécessite une charge de calcul importante.

Dans cette voie de recherche on peut citer par exemple le travail de Biernacki et al [12]. Ils proposent une procédure itérative d'amélioration d'un contrôleur par rapport à une certaine mesure de robustesse. A partir d'une commande initiale donnée, l'hypersphère de rayon maximal dans l'espace de variations paramétriques est calculée; ensuite, un algorithme essaye d'augmenter ce rayon en changeant le régulateur. Valable uniquement pour des systèmes mono-entrée ou mono-sortie, ou alors pour des simplifications assez restrictives du cas général, leur méthode travaille en vérité avec les coefficients du polynôme caractéristique (et non directement dans l'espace paramétrique).

Dans Keel et al [25], une procédure analogue est proposée, pour une représentation dans l'espace d'état, utilisant des fonctions de Lyapunov et des mesures de robustesse (de Patel et Toda [34] et Yedavalli [53]). Des généralisations de ces procédures (qui agissent l'une dans la représentation fréquentielle comme dans [12] et l'autre dans l'espace d'état [25]) sont présentées dans [26]. L'hypothèse de relations linéaires entre les paramètres et les coefficients du polynôme caractéristique, jusqu'alors nécessaire, est supprimée.

Pour des systèmes discrets mono-entrée mono-sortie, Santos-Mendes [45] propose un algorithme de placement de pôles qui exploite directement l'espace de variations paramétriques et permet de spécifier des sous-régions du cercle unitaire pour la localisation des modes en boucle fermée et l'obtention d'un comportement satisfaisant pour le système commandé. Il donne aussi une mesure de robustesse

vis-à-vis de perturbations admises.

Finalement, on peut citer des approches plutôt classées dans la théorie géométrique de commande, dont traitent les divers travaux de Hyland et Bernstein [24].

## 1.6 Stabilisabilité Quadratique

Les résultats les plus significatifs de ce mémoire sont ceux qui abordent le concept de stabilisabilité quadratique pour les systèmes linéaires incertains. Nous allons exposer en détail les travaux qui y sont relatifs.

La justification du concept de "stabilisabilité quadratique" peut se faire à partir de l'importance de la théorie de Lyapunov, outil d'analyse et de synthèse pour les systèmes linéaires. En particulier, dans le cas des systèmes déterministes, elle fournit une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité; son extension au cas des systèmes incertains paraît naturelle, et il est permis de penser que pour des domaines d'incertitudes réduits les conditions de stabilisabilité quadratique, qui sont alors suffisantes, ne soient pas indûment restrictives. Signalons également que l'énoncé du problème de stabilisation et commande devient relativement simple et qu'il conduit, comme on va le voir, à la formulation d'un problème d'optimisation paramétrique classique.

Parmi les premiers travaux dans le domaine, citons ceux de Leitman [30] traitant du cas d'incertitudes bornées et de Gutman [20] qui a introduit la formulation de "système dynamique généralisé" en utilisant une approche type Lyapunov. La plupart des travaux initiaux considèrent en général le cas où seule la matrice dynamique  $A$  est incertaine et de plus celle-ci doit satisfaire certaines conditions (dites "matching conditions") définissant une structure particulière pour les incertitudes:

$$A = A_0 + \Delta A(r) \quad , \quad \Delta A(r) = B_0 \delta A(r) \quad (1.34)$$

où  $(\cdot)_0$  sont les valeurs nominales. Ces conditions bien sûr restreignent la classe des systèmes envisagés.

Donnons d'abord la définition de la stabilisabilité quadratique pour un système précisément connu:

**Définition 1.1** On dit qu'un système linéaire est quadratiquement stabilisable s'il existe une fonction de Lyapunov quadratique  $v = x'Px$ ,  $P = P' > 0$ , et une commande  $u = p(x)$  telles que:

$$x'[A'P + PA]x + 2x'PBp(x) \leq -\alpha \|x\|^2 \quad , \quad \alpha > 0 \quad (1.35)$$

Maintenant, nous présentons le théorème de Hollot et Barmish [23] établissant des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisabilité quadratique (systèmes avec  $A$  incertain) sans imposer des conditions sur  $A(\cdot)$ .

**Théorème 1.3** ([23] Hollot et Barmish) Le système dynamique linéaire

$$\dot{x} = A(r(t))x + Bu \quad (1.36)$$

est stabilisable quadratiquement si et seulement s'il existe,  $\forall r(t) \in \mathcal{R}$  (domaine compact fermé), une matrice définie positive  $W$  telle que

$$x'[A(r)W + WA(r)']x < 0 \quad \forall x \in \mathcal{N} \quad (1.37)$$

où  $\mathcal{N} \triangleq \{x \neq 0 : B'x = 0\}$ .

La condition (1.37) permet d'assurer qu'il existe alors une fonction de Lyapunov telle que sa dérivée temporelle soit définie négative pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  (voir démonstration du théorème 2.3, chapitre 2).

De plus, si l'on trouve un  $W$  satisfaisant la condition du théorème 1.3, la commande linéaire

$$u = -\lambda B'W^{-1}x \quad (1.38)$$

avec  $\lambda > 0$  réel suffisamment grand stabilise (quadratiquement) le système (1.36).

Ce résultat a également été étendu au cas où  $B$  est incertain par la définition de "generalized matching conditions"

$$B = B_0 + B_0\delta B$$

mais l'existence d'une commande linéaire robuste n'est point évidente (voir, par exemple, [7], [13] et [49]). Un algorithme basé sur la résolution itérative d'une équation de type Riccati est proposé par Noldus [33], pour la recherche d'une matrice de Lyapunov satisfaisant les conditions de stabilisabilité quadratique.

En 1983, Barmish [2] introduit le concept de système dynamique augmenté:

$$\dot{z} = Fz + Gu \quad (1.39)$$

où  $F \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  et  $G \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times m}$  sont des matrices données par

$$F \triangleq \begin{bmatrix} A(r) & B(s) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad G \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{1}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

et  $z \in \mathfrak{R}^{n+m}$ ,  $u \in \mathfrak{R}^m$  sont définis par

$$z \triangleq \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad ; \quad \frac{d}{dt}y = u \quad (1.41)$$

Ce changement permet de se ramener au cas où les incertitudes n'interviennent que sur la matrice "dynamique". Cet artifice simple étend du même coup tous les résultats obtenus dans le cas où seule la matrice  $A$  était incertaine, au cas général d'incertitude sur le couple  $(A, B)$ . Ainsi, Barmish démontre que pour l'analyse de la stabilité quadratique par commande linéaire les systèmes (1.39) et (1.1) sont équivalents. Il montre aussi que s'il existe une commande  $u = p(x(t)) \in C^1$  qui stabilise quadratiquement (1.1) alors une commande linéaire  $u = -Kx$  existe et peut accomplir la même tâche.

L'ensemble des systèmes linéaires incertains stabilisables quadratiquement, qui admettent une commande linéaire, est ainsi plus ou moins caractérisé. Toutefois, Petersen [37] en 1985 montre, à partir d'un contre-exemple, que certains systèmes pour des conditions particulières sur l'incertitude exigent une commande non linéaire pour la stabilité quadratique.

En août 1985, Barmish [4] publie des conditions théoriques nécessaires et suffisantes pour la stabilisabilité quadratique des systèmes linéaires avec  $A$  et  $B$  incertains. On réécrit ici le système dynamique linéaire

$$\dot{x} = A(r(t))x + B(s(t))u \quad (1.42)$$

avec  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  des fonctions continues,  $r \in \mathcal{R}$  et  $s \in \mathcal{S}$ ,  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$  étant des ensembles compacts. La définition de stabilisabilité quadratique est alors donnée comme suit (d'après [4]):

**Définition 1.2** Le système (1.42) est quadratiquement stabilisable s'il existe une commande continue fonction de l'état  $p(\cdot) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  avec  $p(0) = 0$ , une matrice symétrique définie positive  $P$  et une constante réelle  $\alpha > 0$  qui satisfont (pour l'ensemble d'incertitudes admissibles)

$$x'[A(r(t))'P + PA(r(t))]x + 2x'PB(s(t))p(x) \leq -\alpha \|x\|^2 \quad (1.43)$$

$\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  et  $\forall t$ .

Cette définition est juste l'extension de la définition 1.1 (qui considérait uniquement  $A$  incertain) au cas où  $A$  et  $B$  sont des matrices incertaines. Si la relation (1.43) est vérifiée, alors  $v = x'Px$  est une fonction de Lyapunov du système (1.42) en boucle fermée.

Passons maintenant au résultat établi par Barmish en 1985 [4]. D'abord on définit  $\mathcal{E}_B$  comme étant l'enveloppe convexe de  $B(s(t))$ . On énonce alors le théorème:

**Théorème 1.4** Le système dynamique incertain (1.42) est quadratiquement stabilisable si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive  $W$  telle que

$$x'[A(r(t))W + WA(r(t))']x < 0 \quad (1.44)$$

$\forall r(t) \in \mathcal{R}$  et  $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  :  $B'x = 0$ , où  $B$  est une matrice quelconque appartenant à  $\mathcal{E}_B$ .

La démonstration, assez technique, est développée dans [4] et ne sera pas reprise ici.

Ce théorème est sans doute le résultat essentiel de la théorie de stabilisabilité quadratique (systèmes incertains), quoiqu'il ne fournisse pas les outils numériques nécessaires pour la construction de  $W$  et de  $u = p(x)$ . Une expression analytique de  $p(x)$  est établie uniquement pour les systèmes mono-entrée; et il reste la question pratique intéressante de bien caractériser une classe de systèmes incertains (en dehors, bien sûr, de celle avec  $B = \text{constant}$ ) pour laquelle la stabilisabilité quadratique équivaut à la stabilisabilité quadratique par commande linéaire.

Le volume de travaux traitant de ce thème-là n'a pas cessé de croître. Il faut remarquer qu'il est même difficile d'établir un ordre chronologique, car des communications en congrès anticipent parfois la publication de résultats auxquels elles font référence. Toutefois, dans ce qui suit, nous tentons de donner un panorama de l'évolution de cette théorie.

En 1986, Petersen et Hollot [44] proposent une procédure numérique pour la construction d'une fonction de Lyapunov associée à la stabilisabilité quadratique d'un système incertain. Elle est basée sur la résolution d'une équation de type Riccati. L'algorithme utilise une borne supérieure pour la dérivée de la fonction de Lyapunov du système en boucle fermée, ce qui fournit des conditions suffisantes

de stabilisabilité quadratique. Le système en question est considéré sous la forme

$$\dot{x} = [A_0 + \sum_{i=1}^{n_r} r_i(t) A_i] x + [B_0 + \sum_{j=1}^{n_s} s_j(t) B_j] u \quad (1.45)$$

avec

$$\begin{aligned} |r_i(t)| &\leq \bar{r} \quad , \quad i = 1 \dots n_r \quad \bar{r} \geq 0 \\ |s_j(t)| &\leq \bar{s} \quad , \quad j = 1 \dots n_s \quad \bar{s} \geq 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

et les matrices  $A_i$  et  $B_j$  sont supposées des matrices de rang 1

$$A_i = d_i e_i' \quad \text{et} \quad B_j = f_j g_j' \quad (1.47)$$

où  $d_i$ ,  $e_i$ ,  $f_j$  et  $g_j$  sont des vecteurs-colonne. Bien sûr, toute matrice peut s'écrire comme une somme de matrices de rang 1. Toutefois ces décompositions ne sont point uniques, et la procédure numérique développée peut échouer pour une décomposition donnée et réussir pour une autre. On introduit les matrices

$$T \triangleq \sum_{i=1}^{n_r} d_i d_i' \quad , \quad U \triangleq \sum_{i=1}^{n_r} e_i e_i' \quad (1.48)$$

$$V \triangleq \sum_{j=1}^{n_s} g_j g_j' \quad , \quad Z \triangleq \sum_{j=1}^{n_s} f_j f_j' \quad (1.49)$$

**Théorème 1.5** Soit  $\epsilon > 0$  un scalaire donné et supposons que l'"équation de Riccati"

$$A_0' P + P A_0 - P \left[ \frac{1}{\epsilon} (B_0 R^{-1} B_0' - \bar{s} B_0 R^{-1} V R^{-1} B_0' - \bar{s} Z) - \bar{r} T \right] P + \bar{r} U + \epsilon Q = 0 \quad (1.50)$$

(où  $Q$  et  $R$  sont des matrices quelconques symétriques définies positives) possède une solution  $P$  définie positive; alors, le système (1.45)-(1.46) est quadratiquement stabilisable.

L'algorithme pour la construction d'une telle matrice  $P$  est donné ci-dessous.

### Algorithme 1.1

- **Etape 1:** Initialiser  $\epsilon$  (par exemple,  $\epsilon = 1$ ).

- **Etape 2:** Déterminer si l'équation (1.50) admet une solution  $P$  définie positive. Si oui, l'algorithme a réussi et le système (1.45) est quadratiquement stabilisable. Si non, passer à l'étape 3.
- **Etape 3:** Faire  $\epsilon = \epsilon/2$ . Si  $\epsilon$  est inférieur à une précision numérique fixée, arrêter (l'algorithme a échoué).

Il est clair que l'algorithme fournit une condition suffisante pour la stabilité quadratique du système incertain (1.45). En cas de réussite, cependant, il faut se servir des méthodes décrites dans [4] pour arriver à un gain non linéaire  $u = p(x)$ . Des conditions nécessaires et suffisantes sont atteintes uniquement dans le cas où  $B$  est constant.

Cette procédure a été étendue (Petersen [38]) pour la recherche d'une commande unique qui stabilise plusieurs points de fonctionnement d'un même système mono-entrée. La loi de commande, non linéaire, est extraite des diverses fonctions quadratiques de Lyapunov qui sont associées à chaque point de fonctionnement.

La détermination de cette loi de commande  $u = p(x)$  a fait l'objet d'un article de Petersen et Barmish [43], qui introduit le concept de "commande d'effort minimum" et suggère quelques extensions possibles vers les systèmes non linéaires.

En 1987, en y ajoutant d'autres hypothèses sur l'incertitude, Petersen [39] présente un algorithme (toujours basé sur la résolution d'une "équation de Riccati") qui délivre finalement des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité quadratique pour une certaine classe de systèmes incertains. Le modèle considéré est de la forme

$$\dot{x} = (A + DF(t)E)x + Bu \quad (1.51)$$

$$F(t)'F(t) \leq \mathbf{1} \quad (1.52)$$

$D$  et  $E$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées. La condition (1.52) est ce que l'on appelle "incertitude bornée en norme", et plusieurs travaux postérieurs adoptent cette formulation. Une "équation de Riccati", paramétrée en  $\epsilon > 0$ , donnée par

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + \epsilon PDD'P + \frac{1}{\epsilon}E'E + Q = 0 \quad (1.53)$$

indique, d'après l'existence ou non d'une solution  $P$  définie positive, si le système

(1.51)-(1.52) est quadratiquement stabilisable. Une commande linéaire  $u = -Kx$  est alors déterminée, avec  $K = R^{-1}B'P$ .

Avec  $Q = Q' > 0$  et  $R = R' > 0$  quelconques (par exemple,  $Q \equiv 1$  et  $R \equiv 1$ ), la procédure numérique proposée (en fait, la même que celle décrite par l'algorithme 1.1), converge si et seulement s'il existe une solution  $P = P' > 0$ .

Petersen montre encore dans son article que pour des systèmes qui n'appartiennent pas à la classe ci-dessus, il est toujours possible de créer (à partir de bornes majorantes) une sorte de système enveloppant; celui-ci satisfait alors le modèle donné par (1.51)-(1.52), mais bien sûr, on retombe dans des conditions suffisantes.

Plus tard, Hollot [22] introduit le concept de "fonctions de Lyapunov borne-invariantes" (c.a.d., fonctions de Lyapunov indépendant de l'ensemble — ou de ses bornes — d'incertitudes considéré). Il s'agit en quelque sorte d'une généralisation des résultats obtenus dans le cas des "matching conditions". Avec ce type de fonction, il est possible d'éviter quelques difficultés dues aux conditions non linéaires de stabilisabilité quadratique exprimées par Barmish en 1985 [4]. En effet, si un système incertain admet une fonction de Lyapunov borne-invariante, alors il est stabilisable par une commande linéaire (qui peut, toutefois, être elle-même dépendante des incertitudes!). Pour cela, Hollot suppose des systèmes décrits par (1.45) avec  $B$  constant, et  $A_i = d_i e_i'$  ( $d_i, e_i$  vecteurs). Il établit des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction de Lyapunov borne-invariante. Son résultat peut être étendu au cas où  $B$  est incertain par l'utilisation du système augmenté mentionné auparavant.

Schmitendorf [47] étend la technique de Petersen et Hollot et obtient des conditions nécessaires et suffisantes pour des systèmes avec  $A$  et  $B$  incertains (incertitude décomposable comme en (1.45)-(1.46)).

Au cours de l'année 1988, Zhou et Khargonekar [55] publient une synthèse des résultats de Barmish [2], [4] et de Petersen [39]. Ils établissent, pour des incertitudes bornées en norme, l'équivalence entre la stabilité quadratique d'un système avec  $A$  et  $B$  incertains par commande linéaire et l'existence d'une solution symétrique définie positive d'une équation de type Riccati. Une fois qu'une solution est trouvée, un gain linéaire est immédiatement déterminé. Le système est donné par

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u \quad (1.54)$$

où l'incertitude, par hypothèse, s'écrit:

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \end{bmatrix} = DF(t)E \quad (1.55)$$

où  $D$  et  $E$  sont des matrices constantes de dimensions appropriées et  $F(t)'F(t) \leq \mathbf{1}$ . Le système augmenté est donné par

$$\dot{x}_a = (A_a + \Delta A_a)x_a + B_a u_a \quad (1.56)$$

avec

$$A_a = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta A_a = \begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_a = \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ \mathbf{1}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

et  $\Delta A$  peut s'écrire

$$\Delta A = D_a F(t)E \quad , \quad D_a = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

Aucune incertitude n'intervient sur  $B_a$ , alors dans ce cas les résultats de Petersen [39] sont parfaitement applicables.

**Lemme 1.1** (Barmish [2]) Le système décrit par (1.54)-(1.55) est quadratiquement stabilisable par commande linéaire si et seulement si le système augmenté (1.56)-(1.58) est quadratiquement stabilisable par commande linéaire.

**Lemme 1.2** (Petersen [39]) Le système (1.56)-(1.58) est quadratiquement stabilisable par commande linéaire si et seulement s'il existe une constante réelle  $\beta > 0$  telle que l'équation de type Riccati

$$A_a' P_a + P_a A_a - P_a B_a R_a^{-1} B_a' P_a + \beta P_a D_a D_a' P_a + \frac{1}{\beta} E' E + Q_a = 0 \quad (1.59)$$

admette une solution symétrique définie positive  $P_a$  ( $Q_a$  et  $R_a$  sont des matrices symétriques définies positives quelconques).

La procédure numérique (dérivée de celle de Petersen [39]) pour le problème augmenté est donnée ci-dessous (Zhou et Khargonekar [55]):

### Algorithme 1.2

- **Etape 1:** Choisir  $Q_a = Q_a' > 0$ ,  $R_a = R_a' > 0$  et  $\beta > 0$  quelconques.

- **Etape 2:** Résoudre l'“équation de Riccati” donnée par (1.59). Si une solution  $P_a = P'_a > 0$  est obtenue, **stop**. Le système (1.54) est quadratiquement stabilisable. Sinon, aller à l'étape 3.
- **Etape 3:** Faire  $\beta = \beta/2$ ; si  $\beta < \epsilon_0$  (où  $\epsilon_0$  représente la précision admise pour les calculs numériques), **stop**; l'équation (1.59) n'admet pas de solution, et donc le système en question n'est pas quadratiquement stabilisable par commande linéaire.

Si l'algorithme converge, une commande linéaire est donnée par (Barmish [2], Zhou et Khargonekar [55]):

$$u = -P'_{a12}P_{a11}^{-1}x \quad (1.60)$$

où  $P_{a12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $P_{a11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont des sous-matrices de  $P_a$ ,

$$P_a \triangleq \begin{bmatrix} P_{a11} & P_{a12} \\ P'_{a12} & P_{a22} \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

Petersen [42] a montré que pour des systèmes où uniquement  $B$  est incertain, soit

$$\dot{x} = Ax + (B + DF(t)E)u \quad (1.62)$$

$$F(t)'F(t) \leq 1 \quad (1.63)$$

(ainsi que pour des systèmes avec uniquement  $A$  incertain — équations (1.51)-(1.52)) le même algorithme peut être utilisé, et dans ce cas il n'est nul besoin d'augmenter l'ordre du problème original.

De nombreuses “variations” autour de la stabilisation quadratique apparaissent de nos jours, nous en donnons pour terminer un rapide aperçu.

Petersen [41] analyse les différences qui peuvent exister entre l'analyse de paramètres incertains variant dans le temps et l'analyse des incertitudes que l'on peut qualifier de stationnaires (les paramètres restent constants dans un domaine d'incertitude prédéfini). Il montre que dans ce cas, il est possible de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisabilité quadratique en utilisant non plus une fonction de Lyapunov unique mais une famille de fonctions de Lyapunov (une pour chaque paramètre inconnu qui demeure constant). En réalité, le concept de stabilisabilité quadratique tel qu'il était défini par Barmish [4] a

été légèrement modifié, car dans l'article de Petersen, la stabilité est garantie au moyen de plusieurs fonctions de Lyapunov et non plus par une seule pour tout l'ensemble admissible d'incertitudes.

Zhou et Khargonekar [56] reprennent le problème de la stabilisation quadratique pour des systèmes avec des incertitudes structurées en blocs, faisant intervenir une fonction de Lyapunov ne dépendant pas de l'ensemble d'incertitudes considérées (problème introduit par Hollot [22]). On a:

$$\dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu \quad (1.64)$$

$$\Delta A = \sum_{i=1}^N D_i F_i(t) E_i' \quad (1.65)$$

Il s'agit en quelque sorte d'une généralisation des incertitudes décrites par des décompositions de rang 1 [22]. Des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation via une fonction de Lyapunov borne invariante sont établies. Des conditions similaires sont déduites pour des systèmes avec des incertitudes scalaires linéaires, c.a.d.

$$\Delta A = \sum_{i=1}^N r_i(t) A_i \quad (1.66)$$

où  $A_i$  n'est plus forcément de rang 1. Le problème est donc réduit à un "problème de Lyapunov contraint" (nomenclature introduite par Galimidi et Barmish [16] pour l'établissement des conditions suffisantes de stabilisation par retour de sortie robuste).

## 1.7 Conclusion

Nous avons donné, dans ce chapitre, un aperçu général des derniers travaux portant sur l'analyse de stabilité des systèmes incertains, en ce qui concerne l'approche par équations d'état.

D'abord nous avons souligné l'importance de quelques travaux pionniers, qui utilisent déjà la synthèse LQ et les fonctions de Lyapunov pour arriver à une commande robuste. Néanmoins, ces premiers efforts manquent de rigueur mathématique. Ensuite, nous avons passé en revue quelques idées concernant les mesures de robustesse associées aux systèmes dynamiques, mais aussi quelques résultats

portant sur l'analyse de la stabilité à partir des équations caractéristiques.

Finalement, nous avons présenté plus en détail le développement de la théorie de la stabilisabilité quadratique au cours de ces dernières années. Fondés sur la théorie de Lyapunov, les travaux abordant les systèmes incertains ont évolué d'un premier seuil qui imposait des hypothèses assez restrictives sur l'interférence des incertitudes (et de plus seulement la dynamique était affectée) jusqu'à la considération des incertitudes sur les matrices  $A$  et  $B$  qui n'ont comme contrainte que celle d'appartenir à un ensemble fermé.

Ce panorama général nous permettra, par la suite, d'exposer nos travaux personnels sur ce sujet, mais aussi de marquer les différences et les apports. Comme on le verra dans les prochains chapitres, nous proposerons des méthodes qui élargissent l'application de la stabilisabilité quadratique aux systèmes incertains. Elles permettent le traitement des systèmes discrets incertains et la manipulation de contraintes comme la décentralisation, entre autres.

## Chapitre 2

# Stabilisabilité et Commande Robuste — Systèmes Continus

### 2.1 Introduction

Ce chapitre présente les principaux résultats de ce mémoire, concernant l'analyse de stabilisabilité et la synthèse d'une commande robuste pour des systèmes linéaires continus, décrits par des équations d'état et, donc, caractérisés par le couple de matrices  $(A, B)$ .

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux systèmes précisément connus, pour lesquels l'existence d'une fonction de Lyapunov est une condition nécessaire et suffisante de stabilité. A partir d'un théorème établissant des conditions de stabilisabilité basées toujours sur l'existence d'une matrice de Lyapunov, nous proposons un problème d'optimisation associé qui permet la recherche de cette fonction de Lyapunov. Les propriétés du problème (convexité, en particulier) font qu'une procédure itérative peut être définie. Celle-ci trouvera la solution lorsqu'elle existe et donnera un message de non existence dans le cas contraire.

Cette méthode de synthèse et d'analyse possède l'avantage de permettre l'incorporation de contraintes additionnelles au problème de départ; ceci nous amène à formuler une procédure pour traiter les problèmes de commande décentralisée.

Avec le concept de stabilisabilité quadratique (une seule fonction de Lyapunov utilisable pour tout l'ensemble admissible d'incertitude), introduit par Hollot et Barmish en 1980 [23], on incorpore aux résultats précédents le traitement des systèmes incertains. L'extension directe de la condition de stabilisabilité précédente permet de traiter seulement le problème où  $A$  est incertain. De plus, en tant que méthode de synthèse il est difficile d'y incorporer certaines spécifications sur la commande telle que par exemple celle d'obtenir une commande à gains

raisonnables en amplitude.

Ainsi, avec une formulation légèrement modifiée par rapport aux premiers résultats, nous présentons des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisabilité quadratique pour des systèmes avec  $A$  et  $B$  incertains. Ces conditions sont aussi facilement traduisibles en un problème d'optimisation, dont la procédure numérique associée est tout à fait similaire à celle développée auparavant. La recherche d'une commande décentralisée est de nouveau facilement incorporée. De plus, cette formulation permet d'intégrer au problème d'optimisation une certaine préoccupation portant sur la norme des éléments du gain robuste. Bien sûr, tous ces résultats sont applicables au cas où l'incertitude n'atteint pas la matrice  $B$ , aboutissant à des gains plus intéressants du point de vue norme.

Finalement, en utilisant une formulation dite étendue, nous récupérons en quelque sorte la formulation initiale du problème, en arrivant à traiter l'incertitude sur les matrices  $A$  et  $B$  en explicitant comme variable du problème d'optimisation une borne supérieure pour la norme du gain robuste  $K$ . Cette formulation étendue permet aussi la réalisation de la commande robuste décentralisée.

Comme on le verra dans le troisième chapitre, c'est grâce à cette formulation étendue qu'on est aussi capable de traiter les mêmes problèmes dans le cadre de systèmes linéaires discrets, en utilisant des théorèmes et des procédures similaires à ceux du cas continu.

## 2.2 Stabilisabilité de Systèmes Linéaires

Considérons tout d'abord un système dynamique linéaire décrit par

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1)$$

où  $A$  et  $B$  sont précisément connus. Le système (2.1) est dit stabilisable s'il existe un gain  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tel que le système en boucle fermée

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (2.2)$$

est asymptotiquement stable (toutes les valeurs propres de  $(A - BK)$  sont à partie réelle strictement négative).

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité du système (2.1) s'énonce comme suit:

### 2.2.1 Condition Nécessaire et Suffisante de Stabilisabilité

**Théorème 2.1** Le système dynamique linéaire (2.1) est stabilisable si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive  $W$  telle que  $\forall x \in \mathcal{N}$

$$x'[AW + WA']x < 0 \quad (2.3)$$

avec  $\mathcal{N} \triangleq \{x \neq 0 : B'x = 0\}$ .

#### Démonstration

##### • Nécessité

Le fait que le système (2.1) soit stabilisable implique l'existence d'un gain  $K$  tel que (2.2) soit asymptotiquement stable; ceci est équivalent à l'existence d'une matrice symétrique définie positive  $P$  telle que (Lyapunov)

$$(A - BK)'P + P(A - BK) < 0 \quad (2.4)$$

alors, avec  $P = W^{-1}$ , il vient

$$(A - BK)'W^{-1} + W^{-1}(A - BK) < 0 \quad (2.5)$$

et post et pré-multipliant par  $W$

$$(A - BK)W + W(A - BK)' < 0 \quad (2.6)$$

ou

$$AW + WA' - BKW - WK'B' < 0 \quad (2.7)$$

qui équivaut à,  $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$

$$x'[AW + WA' - BKW - WK'B']x < 0 \quad (2.8)$$

Comme (2.8) est valable  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , il est vrai aussi pour  $x \in \mathcal{N}$ , et donc

$$x'[AW + WA']x < 0 \quad \forall x \in \mathcal{N} \quad (2.9)$$

et la nécessité est démontrée.

##### • Suffisance

Pour démontrer la suffisance, d'abord on montre qu'il existe une matrice symé-

trique définie positive  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  telle que

$$AW + WA' < BSB' \quad (2.10)$$

ou, de manière équivalente,  $\forall x \neq 0, x \in \mathfrak{R}^n$

$$x'[AW + WA']x < x'BSB'x \quad (2.11)$$

Bien sûr, l'expression (2.11) est satisfaite pour tout  $x$  tel que  $x'[AW + WA']x < 0$ . Alors, on s'intéresse à l'ensemble des  $x \neq 0 \in \Psi$ ,

$$\Psi \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n : x'[AW + WA']x \geq 0\} \quad (2.12)$$

qui définissent un cône fermé. On doit démontrer que l'équation (2.11) est aussi satisfaite pour  $x \in \Psi$ . Définissons

$$\mu \triangleq \min_{\|x\|=1, x \in \Psi} x'BB'x \quad (2.13)$$

et

$$\lambda \triangleq \lambda_{\max}[AW + WA'] \quad (2.14)$$

Il est clair que  $\mu > 0$ , car  $\mu = 0$  si et seulement si  $x^*$  (solution de la minimisation décrite par (2.13)) appartient à l'ensemble  $\mathcal{N}$ , ce qui est impossible puisque (2.13) considère uniquement  $x \in \Psi$  (et l'intersection entre  $\mathcal{N}$  et  $\Psi$  est vide). Prenons alors  $S = \alpha \mathbf{1}_{m \times m}$ ,  $\alpha > 0$  à déterminer. Avec (2.13) et (2.14), en choisissant  $\alpha > \lambda/\mu$  la relation (2.10) sera toujours satisfaite.

Finalement, en partant de (2.10), on peut écrire

$$W^{-1}A + A'W^{-1} < W^{-1}BSB'W^{-1} \quad (2.15)$$

ou

$$(A - \frac{1}{2}BSB'W^{-1})'W^{-1} + W^{-1}(A - \frac{1}{2}BSB'W^{-1}) < 0 \quad (2.16)$$

ce qui montre qu'il existe un gain  $K \triangleq \frac{1}{2}SB'W^{-1}$  tel que  $(A - BK)$  est asymptotiquement stable.

*Remarque:* le théorème 2.1 fournit une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisabilité d'une paire  $(A, B)$ ; d'une façon imagée, il montre que la fonction de Lyapunov associée au système décrit par  $(A, B)$  n'a pas besoin de "s'occuper" de tous les états  $x$ , et propose la recherche d'une matrice de Lyapunov sur les seuls états qui ne peuvent être atteints par la commande à travers la matrice  $B$ . Ceci est une simplification d'un résultat de Hollot et Barmish [23], que nous présentons légèrement modifié, ce qui nous permettra par la suite sa traduction en un problème d'optimisation.

Définissons maintenant la matrice  $T \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ , formée par des vecteurs orthonormés qui engendrent l'espace nul de  $B'$

$$T \triangleq [t^1 \mid t^2 \mid \dots \mid t^{n-m}] \quad (2.17)$$

avec  $t^i \in \mathbb{R}^n$ , et donc

$$x \in \mathcal{N} \iff x = Ty \quad (2.18)$$

où  $y \neq 0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ . Ainsi, la condition décrite par le théorème 2.1 peut être reformulée:

$$x'Wx > 0 \quad , \quad \forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (2.19)$$

$$y'T'[AW + WA']Ty < 0 \quad , \quad \forall y \neq 0, y \in \mathbb{R}^{n-m} \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Problème d'Optimisation Associé

Notre problème est de trouver une méthode efficiente qui fournisse une matrice  $W$  symétrique satisfaisant le théorème 2.1. Définissons d'abord

$$H(W) \triangleq T'[AW + WA']T$$

Les conditions (2.19)-(2.20) peuvent être écrites:

$$\begin{aligned} W > 0 &\iff \lambda_{\min}(W) > 0 \\ H(W) < 0 &\iff \lambda_{\max}(H(W)) < 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les inégalités strictes (2.21) définissent des ensembles ouverts; il est préférable, à des fins de traitement numérique, de les "transformer" en relations définissant des ensembles fermés. Ceci est fait, sans nuire à la généralité du problème, en écrivant:

$$\begin{aligned} W \geq \rho_1 \mathbf{1} &\iff \lambda_{\min}(W) \geq \rho_1, \quad \rho_1 > 0 \\ H(W) \leq -\rho_2 \mathbf{1} &\iff \lambda_{\max}(H(W)) \leq -\rho_2, \quad \rho_2 > 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

On peut démontrer (voir annexe) que  $\lambda_{\min}(W)$  et  $\lambda_{\max}(T'[AW + WA']T)$  définissent respectivement des fonctions concaves et convexes par rapport à  $W$ , ce qui entraîne que les inégalités (2.22) caractérisent un ensemble convexe fermé de solutions admissibles  $W$  satisfaisant le théorème 2.1. Il est alors possible de formuler un problème d'optimisation présentant des propriétés de convexité, exploitables par des méthodes classiques de programmation mathématique. Par exemple, nous proposons:

$$\begin{aligned} &\min_W J(W) \\ \text{sous} & \begin{cases} W > 0 \\ H(W) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Discutons un peu de ce problème. La liberté qui existe pour le choix du critère devra être utilisée de manière à définir des problèmes bien conditionnés, pour lesquels il existe des méthodes efficaces de résolution. C'est, par exemple, le cas de problèmes d'optimisation linéaires. De plus, comme il est montré dans l'annexe, on peut facilement trouver les sous-gradients associés aux fonctions  $\lambda_{\min}(W)$  et  $\lambda_{\max}(H(W))$ . Ceci nous permet d'envisager l'emploi d'une méthode de type "plans-de-coupe"; sachant que cette méthode va générer itérativement des contraintes linéaires qui, avec le choix d'un critère  $J$  linéaire, conduira à la résolution séquentielle d'une suite de problèmes linéaires. On verra ultérieurement qu'il est également important d'utiliser cette liberté de choix au niveau du critère et de la formulation du problème afin d'obtenir des solutions à caractéristiques recherchées.

Nous proposons donc comme critère

$$J(W) = \max_{p=1 \dots n} \{w_{pp}\} \quad (2.24)$$

et le problème (2.23) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma \\ w_{pp} \leq \sigma \quad & p = 1 \dots n \end{aligned} \tag{2.25}$$

où  $\sigma$  est une variable d'optimisation scalaire additionnelle et  $w_{pp}$  sont les éléments diagonaux de  $W$ .

Le fait de minimiser une borne supérieure pour les éléments diagonaux  $w_{pp}$  va également "forcer" (comme on impose  $W > 0$ ) les éléments hors diagonaux à rester bornés, ce qui évite le cas difficile en pratique de branches infinies (c.a.d., des éléments  $w_{pq}$  qui pourraient tendre vers l'infini). Comme il s'agit de rechercher une matrice  $W$  qui sera forcément définie positive, cela implique que tous les éléments diagonaux de  $W$  ( $w_{pp}$ ,  $p = 1 \dots n$ ) doivent être strictement positifs. Ainsi, on peut réécrire (sans perte de généralité) notre problème d'optimisation:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma \\ \text{sous} \quad & 0 < w_{pp} \leq \sigma \\ & \begin{cases} W > 0 \\ H(W) < 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Il s'avère que l'introduction des contraintes  $0 < w_{pp}$  (qui, nous le répétons, ne sont pas strictement nécessaires car redondantes par rapport à  $W > 0$ ) a un effet favorable du point de vue numérique, empêchant dès les premières itérations les variables  $w_{pp}$  de devenir négatives.

Une dernière transformation se révèle nécessaire, simplement pour réexprimer (2.26) comme un problème où les contraintes définissent des ensembles fermés. On y ajoute (2.22) et enfin on arrive à la forme finale de notre problème d'optimisation:

Problème d'Optimisation No. 1 (PO - 1)

$$\begin{array}{l}
 \min_W \quad \sigma \\
 \text{sous} \\
 \varepsilon_1 \leq w_{pp} \leq \sigma \quad p=1 \dots n \\
 \left\{ \begin{array}{l} W \geq \varepsilon_2 \mathbf{1} \\ H(W) \triangleq T'[AW + WA']T \leq -\varepsilon_3 \mathbf{1} \end{array} \right. \quad (2.27)
 \end{array}$$

avec  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  scalaires positifs ajustables. Ces paramètres représentent en fait des degrés de liberté pouvant être choisis en fonction d'autres exigences par rapport à la solution  $W$  et (indirectement) par rapport au gain  $K$  stabilisant, comme on le verra par la suite.

Parlons encore de l'inégalité  $\varepsilon_1 \leq w_{pp}$ ; d'un point de vue théorique, elle peut être enlevée du problème PO - 1, car la contrainte  $W \geq \varepsilon_2 \mathbf{1}$  impose  $w_{pp} \geq \varepsilon_2$ . Toutefois, dans une approche par plans de coupe, la contrainte  $W \geq \varepsilon_2 \mathbf{1}$  ne génère effectivement les contraintes  $w_{pp} \geq \varepsilon_2$  qu'au bout d'un certain nombre d'itérations. Nous avons décidé d'explicitier dès le départ les contraintes  $w_{pp} \geq \varepsilon_1$  pour faciliter la résolution du problème simplexe nécessaire à chaque itération (sachant que dans un problème de programmation linéaire il est plus naturel de traiter de variables bornées). Ainsi, on évite d'avoir des fluctuations (qui s'avèrent importantes pendant les premiers pas de l'algorithme) pour tous les éléments de  $W$ . Enfin, comme il est nécessaire, pour satisfaire  $W \geq \varepsilon_2 \mathbf{1}$ , d'avoir  $w_{pp} \geq \varepsilon_2$ , nous avons fixé le paramètre  $\varepsilon_1$  égal à  $\varepsilon_2$ .

Une formulation spéciale du problème simplexe a été requise, pour pouvoir traiter les éléments  $w_{pq}$ ,  $p \neq q$ , qui peuvent ici acquérir n'importe quelle valeur, positive ou négative.

Le fait de fixer a priori les paramètres  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$  ne risque pas de restreindre le domaine des solutions admissibles. En effet, supposons qu'il existe  $W^*$  satisfaisant (2.22), c'est-à-dire

$$\begin{array}{l}
 W^* \geq \rho_1 \mathbf{1} \\
 T'[AW^* + W^*A']T \leq -\rho_2 \mathbf{1}
 \end{array} \quad (2.28)$$

Alors, pour satisfaire les contraintes matricielles de (2.27), nous pouvons choisir

$W = \gamma W^*$  avec

$$\gamma = \max \left\{ \frac{\varepsilon_2}{\rho_1}, \frac{\varepsilon_3}{\rho_2} \right\} \quad (2.29)$$

Nous pouvons maintenant présenter la procédure numérique associée.

### 2.2.3 Algorithme Numérique

#### Algorithme 2.1

- **Etape 0:**  $\ell = 0$ . Faire  $W = W_\ell = \mathbf{1}_{n \times n}$
- **Etape 1:** Calculer

$$\lambda_W = \lambda_{\min}(W_\ell)$$

et

$$\lambda_H = \lambda_{\max}(H(W_\ell))$$

Si  $\lambda_W \geq \varepsilon_2$  et  $\lambda_H \leq -\varepsilon_3$ , stop. La matrice  $W_\ell$  courante satisfait les conditions du théorème (2.1). Sinon, faire  $\ell = \ell + 1$  et calculer les vecteurs propres normés  $\nu_W$  et  $\nu_H$  associés respectivement à  $\lambda_W$  et  $\lambda_H$ . Former la contrainte (linéaire par rapport aux éléments de  $W$ )

$$c_\ell(W) = \begin{cases} \nu_W' W \nu_W \geq \varepsilon_2 & \text{si } (\varepsilon_2 - \lambda_W) > (\lambda_H + \varepsilon_3) \\ \nu_H' H(W) \nu_H \leq -\varepsilon_3 & \text{si } (\varepsilon_2 - \lambda_W) \leq (\lambda_H + \varepsilon_3) \end{cases}$$

- **Etape 2:** Résoudre le problème de programmation linéaire

min  $\sigma$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 \leq w_{pp} \leq \sigma & p=1 \dots n \\ c_k(W) & k=1 \dots \ell \end{cases}$$

Si le problème ci-dessus n'admet pas de solution, stop. La paire  $(A, B)$  analysée n'est pas stabilisable. Sinon, la solution étant  $W_\ell$ , revenir à l'étape 1.

### 2.2.4 Convergence de l'Algorithme

La convergence globale de l'algorithme est établie par le prochain lemme (voir Luenberger [31]):

**Lemme 2.1** Supposons que l'algorithme décrit ci-dessus génère la séquence  $W_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots$ , alors:

1. Si l'ensemble de matrices  $W$  satisfaisant les conditions données par (2.19) et (2.20) n'est pas vide, alors un point limite de cette séquence est solution de (2.27).
2. Si (2.19) et (2.20) définissent un ensemble vide, un indice d'itération  $\ell^*$  existe pour lequel le problème linéaire de l'étape 2 de l'algorithme 2.1 devient infaisable.

#### Démonstration

Soit l'ensemble  $\mathcal{E}_\ell$  défini par les inégalités

$$c_k(W) \quad k = 1 \dots \ell$$

Par construction, il est facile de voir que

$$\mathcal{E}_\ell \subset \mathcal{E}_{\ell+1} \subset \dots \subset \mathcal{E} \quad (2.30)$$

où  $\mathcal{E}$  représente l'ensemble qui satisfait (2.19)-(2.20). A chaque itération, la contrainte ajoutée sépare la solution actuelle de l'ensemble de solutions faisables pour le prochain pas. De plus,

$$J_\ell^* \leq J_{\ell+1}^* \leq \dots \leq J^* \quad (2.31)$$

où  $J_\ell^*$  est la valeur optimale du critère pour  $W_\ell \in \mathcal{E}_\ell$ , et  $J^*$  celle pour  $W \in \mathcal{E}$ . A l'itération  $\ell$ , la nouvelle contrainte peut s'écrire

$$\lambda_{\min}(W_\ell) + \nu'_W(W - W_\ell)\nu_W \geq \varepsilon_2 \quad (2.32)$$

ou bien

$$\lambda_{\max}[H(W_\ell)] + \nu'_H H(W - W_\ell)\nu_H \leq -\varepsilon_3 \quad (2.33)$$

et il est évident que cette nouvelle contrainte doit être respectée par toutes les solutions ultérieures du problème linéaire (étape 2). Alors, pour tout  $\hat{\ell} > \ell$  on a

$$\lambda_{\min}(W_{\ell}) + \nu'_W(W_{\hat{\ell}} - W_{\ell})\nu_W \geq \varepsilon_2 \quad (2.34)$$

où

$$\lambda_{\max}[H(W_{\ell})] + \nu'_H H(W_{\hat{\ell}} - W_{\ell})\nu_H \leq -\varepsilon_3 \quad (2.35)$$

Lorsque  $\hat{\ell}$  et  $\ell$  tendent vers l'infini,  $\nu'_W(W_{\hat{\ell}} - W_{\ell})\nu_W$  et  $\nu'_H H(W_{\hat{\ell}} - W_{\ell})\nu_H$  tendent vers zéro, alors le point limite de la séquence  $W_{\ell} = W$  doit forcément satisfaire

$$\lambda_{\min}(W) \geq \varepsilon_2$$

$$\lambda_{\max}[H(W)] \leq -\varepsilon_3$$

et donc  $W \in \mathcal{E}$ . Avec  $J_{\ell}^* = J(W_{\ell})$  et (2.31), grâce à la continuité de  $J(\cdot)$  par rapport à  $W$ , on a

$$J(W) \leq J^*$$

$W$  étant la solution optimale. Ceci démontre la première partie.

La deuxième partie se démontre par l'absurde, car s'il n'existe pas de  $W$  satisfaisant (2.19) et (2.20) il aura forcément un indice d'itération  $\ell$  tel que l'ensemble  $\mathcal{E}_{\ell} = \emptyset$ .

*Remarque:* La séquence  $\{W_{\ell}\}$  ne présente pas de répétition, et donc

$$W_{\hat{\ell}} \neq W_{\ell} \quad \forall \hat{\ell} > \ell$$

car la contrainte linéaire d'inégalité ajoutée au problème à l'itération  $\ell + 1$  rend inadmissible la solution du pas  $\ell$ . Le taux de convergence dépend de la "profondeur" des coupes réalisées. Nous prenons toujours la valeur propre qui viole le plus les contraintes ( $\lambda_{\min}(W)$  ou  $\lambda_{\max}(H(W))$ ). Ainsi, on réalise localement la meilleure coupe possible. L'algorithme convergerait aussi si l'on choisissait d'autres valeurs propres violant les contraintes, mais alors la convergence se ferait avec un autre taux.

Le théorème 2.1 avec la procédure numérique associée s'avère un outil intéressant pour l'analyse de la stabilisabilité d'une paire  $(A, B)$ . Parlons maintenant de l'obtention d'un gain stabilisant  $K$ .

### 2.2.5 Détermination d'un Gain Stabilisant

Si l'on se réfère à la démonstration du théorème 2.1, on voit que la condition suffisante découle de l'existence d'une matrice  $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$  symétrique définie positive telle que

$$AW + WA' < BSB' \quad (2.36)$$

d'où l'on déduit que  $K = \frac{1}{2}SB'W^{-1}$  est un gain stabilisant. Sa détermination peut donc se ramener à l'obtention d'une matrice  $S$  satisfaisant (2.36). Il y a plusieurs façons pour la détermination de cette matrice; une manière simple est de choisir a priori une forme

$$S = \alpha S_0, \quad \alpha > 0$$

par exemple  $S_0 = \mathbf{1}_{m \times m}$  (ou  $S_0 = (B'B)$ , ou alors  $S_0 = (B'B)^{-1}$ ) et calculer le scalaire  $\alpha$  de façon à satisfaire

$$AW + WA' < \alpha BS_0 B' \quad (2.37)$$

Ceci peut se faire par la procédure suivante:

#### Algorithme 2.2

- **Etape 0:**  $\alpha = 0$ ;  $S_0 = \mathbf{1}_{m \times m}$ ;  $H = H_0 \triangleq AW^* + W^*A'$  ( $W^*$  solution de l'algorithme 2.1)
- **Etape 1:** Faire  $H = H_0 - \alpha BS_0 B'$ . Calculer  $\lambda_{\max}(H)$ . Si  $\lambda_{\max}(H) < 0$ , **stop**;  $S = \alpha S_0$  est une solution. Sinon, passer à l'étape 2.
- **Etape 2:** Calculer  $\nu_{\max}$  (vecteur propre normé associé à  $\lambda_{\max}(H)$ ) et faire

$$\alpha = \alpha + \frac{\lambda_{\max} + \text{eps}}{\nu_{\max}' B S_0 B' \nu_{\max}}$$

(eps  $\equiv$  scalaire arbitrairement petit). Retourner à l'étape 1.

On peut également adopter une procédure d'optimisation analogue à celle du calcul de  $W$ ; en effet, pour  $W$  donné on vérifie que la relation

$$AW + WA' - BSB' < 0$$

définit un ensemble convexe par rapport aux matrices  $S$  qui la satisfont. Soit, par exemple, le problème d'optimisation suivant:

$$\begin{array}{l} \min_S \zeta \\ \text{sous} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\zeta \leq s_{qp} \leq \zeta \quad p, q = 1 \dots m \\ S \geq \epsilon_4 \\ H_0 - BSB' \leq -\epsilon_4 \mathbf{1} \end{array} \right. \end{array} \quad (2.38)$$

Nous avons déjà discuté de l'intérêt d'avoir les éléments du gain  $K$  de taille convenable. Dans la définition du problème ci-dessus on a tenté de prendre en compte certaines exigences à ce niveau-là. Ainsi, en assurant que la matrice  $W$  solution de l'algorithme 2.1 soit suffisamment écartée de la singularité (par exemple,  $W \geq \mathbf{1}$ ) d'une part, et que les coefficients de  $S$  soient aussi petits que possible d'autre part, on arrive à des gains  $K = SB'W^{-1}$  d'amplitude satisfaisante. Bien sûr, le fait de trouver  $S$  à partir d'une solution  $W$  donnée n'est point a priori la procédure idéale, mais elle doit fournir de meilleurs résultats que ceux obtenus pour  $S$  ayant une forme pré-fixée et étant paramétré en  $\alpha$ .

La discussion au sujet de la norme du gain stabilisant  $K$  sera reprise ultérieurement tout au long de ce mémoire.

### 2.2.6 Equation de Riccati

La forme du gain  $K$  fait à l'évidence penser à la solution obtenue dans une approche Linéaire Quadratique (Riccati). On peut en effet faire un parallèle. Définissons d'abord

$$\Theta(W) = AW + WA' \quad (2.39)$$

Pour  $W$  satisfaisant les conditions du théorème 2.1,

$$\Theta(W) - BSB' < 0 \quad (2.40)$$

Si l'on multiplie à gauche et à droite par  $W^{-1}$ , on obtient

$$W^{-1}[\Theta(W) - BSB']W^{-1} < 0$$

ou bien

$$A'W^{-1} + W^{-1}A - W^{-1}BSB'W^{-1} < 0$$

et on peut écrire

$$A'W^{-1} + W^{-1}A - W^{-1}BSB'W^{-1} + Q = 0$$

avec

$$Q \triangleq W^{-1}[BSB' - \Theta(W)]W^{-1}$$

symétrique définie positive. Finalement,  $P = W^{-1}$  est la solution de l'équation de Riccati

$$A'P + PA - PBSB'P + Q = 0$$

associée au problème

$$\min_u \int_0^{\infty} \{x(t)'Qx(t) + u(t)'S^{-1}u(t)\} dt \quad (2.41)$$

sous

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.42)$$

dont la commande  $u = -Kx$ ,  $K = SB'W^{-1}$  est la solution optimale qui stabilise asymptotiquement le système (2.42).

### 2.2.7 Commande Décentralisée

Nous pouvons maintenant formuler un théorème qui concerne la stabilisabilité par commande décentralisée.

**Théorème 2.2** Le système dynamique linéaire donné par (2.1) avec, par hypothèse, une matrice d'entrée  $B$  bloc diagonale est stabilisable par une commande

linéaire décentralisée s'il existe une matrice symétrique définie positive  $W_D$ , elle aussi bloc diagonale, qui satisfait

$$x'[AW_D + W_D A']x < 0$$

pour tout  $x \in \mathcal{N}$ .

Il est facile de constater, d'après la détermination du gain ( $K = SB'W^{-1}$ ), que le théorème 2.2 fournit une condition suffisante pour l'existence d'un gain  $K$  bloc diagonal (bien sur, il faut un choix convenable pour la forme de  $S$ ). Au niveau de l'algorithme 2.1, cette contrainte signifie même une simplification de la tâche de calcul, car certains éléments de  $W$  sont fixés à zéro.

## 2.3 Incertitude sur la Matrice $A$

Nous considérons maintenant des systèmes linéaires avec  $A$  incertain, c.a.d.

$$\dot{x} = A(r(t))x + Bu \quad (2.43)$$

où le vecteur des paramètres incertains  $r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$  est compris dans un intervalle, ce qui peut s'écrire (composante par composante)

$$\underline{r}_k \leq r_k(t) \leq \bar{r}_k \quad k = 1 \dots n_r \quad (2.44)$$

Faisant l'hypothèse que les éléments de  $A$  sont des fonctions linéaires de ces paramètres, (2.44) définit aussi des bornes supérieures et inférieures pour chacun des éléments incertains de  $A(\cdot)$ . On définit aussi un hypercube  $\mathcal{D}_A$  avec  $N = 2^{n_r}$  sommets auquel doit appartenir toute matrice incertaine  $A$ . Si on appelle  $A_i$  la valeur de  $A(\cdot)$  au sommet  $i$ , toutes les matrices  $A \in \mathcal{D}_A$  peuvent être écrites comme une combinaison linéaire convexe des matrices  $A_i$ . Autrement dit, l'ensemble  $\mathcal{D}_A$  est donné par

$$\mathcal{D}_A = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = \sum_{i=1}^N \xi_i A_i, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\} \quad (2.45)$$

Le problème que nous posons est de trouver des conditions de stabilisabilité et d'obtention d'une commande linéaire  $u = -Kx$  pour le système décrit par (2.43). Nous employons l'approche de stabilisabilité quadratique, qui consiste fondamentalement à vérifier les propriétés de stabilité en utilisant une fonction de

Lyapunov unique pour tout l'ensemble  $\mathcal{D}_A$  (bien sûr, une condition suffisante pour la stabilité).

Rappelons la définition de stabilisabilité quadratique:

**Définition 2.1** Un système linéaire incertain décrit par (2.43) est quadratiquement stabilisable par une commande linéaire s'il existe une fonction de Lyapunov quadratique  $v = x'Px$ ,  $P = P' > 0$ , et une commande  $u = -Kx$  tels que

$$x'[A(r)'P + PA(r)]x + 2x'PBKx \leq -\alpha \|x\|^2, \quad \alpha > 0 \quad (2.46)$$

$\forall A \in \mathcal{D}_A$ . Notons que la partie gauche de l'expression (2.46) est égal à  $\dot{v}(x)$ .

### 2.3.1 Condition Nécessaire et Suffisante de Stabilisabilité Quadratique

Le théorème qui suit est une extension du théorème 2.1, et reprend un résultat de Hollot et Barmish [23] en l'adaptant à la modélisation retenue pour l'incertitude, ce qui permettra par la suite sa traduction en une procédure constructive pour la recherche d'une matrice de Lyapunov.

**Théorème 2.3** Le système décrit par (2.43) est quadratiquement stabilisable par gain linéaire si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive  $W$  telle que  $\forall x \in \mathcal{N}$

$$x'[A_i W + W A_i']x < 0, \quad \forall i = 1 \dots N \quad (2.47)$$

avec  $\mathcal{N} \triangleq \{x \neq 0 : B'x = 0\}$ .

La démonstration est analogue à celle du théorème 2.1:

- Nécessité

Dire que le système est quadratiquement stabilisable par retour d'état est équivalent à dire que:

$$\forall A \in \mathcal{D}_A, \quad \exists P = P' > 0 \quad \text{et} \quad K \quad \text{tels que}$$

$$(A - BK)'P + P(A - BK) < 0 \quad (2.48)$$

En particulier

$$(A_i - BK)'P + P(A_i - BK) < 0 \quad \forall i = 1 \dots N \quad (2.49)$$

d'où l'on tire

$$W = P^{-1}, \quad (A_i - BK)W + W(A_i - BK)' < 0 \quad \forall i = 1 \dots N \quad (2.50)$$

ou

$$x'[(A_i - BK)W + W(A_i - BK)']x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i = 1 \dots N \quad (2.51)$$

et enfin

$$x'[A_i W + W A_i']x < 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}, \quad \forall i = 1 \dots N \quad (2.52)$$

• Suffisance

D'abord on montre qu'il existe une matrice  $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$  symétrique définie positive telle que  $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$x'[A_i W + W A_i']x < x' B S B' x \quad \forall i = 1 \dots N \quad (2.53)$$

En choisissant  $S = \alpha \mathbf{1}_{m \times m}$  et en définissant

$$\Psi_i \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x'[A_i W + W A_i']x \geq 0\} \quad (2.54)$$

$$\Upsilon \triangleq \bigcup_{i=1 \dots N} \Psi_i \quad (2.55)$$

et aussi

$$\lambda \triangleq \max_{i=1 \dots N} \{\lambda_{\max}[A_i W + W A_i']\} \quad (2.56)$$

$$\mu \triangleq \min_{\|z\|=1, z \in \Upsilon} z' B B' z > 0 \quad (2.57)$$

avec  $\alpha > \lambda/\mu$ , la relation (2.53) est satisfaite; alors,  $\forall i = 1 \dots N$

$$(A_i - \frac{1}{2} B S B' W^{-1})' W^{-1} + W^{-1} (A_i - \frac{1}{2} B S B' W^{-1}) < 0 \quad (2.58)$$

ce qui implique

$$\left(\sum_{i=1}^N \xi_i A_i - \frac{1}{2} B S B' W^{-1}\right)' W^{-1} + W^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \xi_i A_i - \frac{1}{2} B S B' W^{-1}\right) < 0 \quad (2.59)$$

et finalement

$$\left(A - \frac{1}{2} B S B' W^{-1}\right)' W^{-1} + W^{-1} \left(A - \frac{1}{2} B S B' W^{-1}\right) < 0 \quad \forall A \in \mathcal{D}_A \quad (2.60)$$

et ceci montre que le gain  $K = \frac{1}{2} S B' W^{-1}$  est un gain stabilisant pour le système (2.43)  $\forall A \in \mathcal{D}_A$ .

Un cas particulier d'incertitude sur  $A$  est quand cette matrice satisfait les "matching conditions". Autrement dit,

$$A = A_0 + B \Delta A \quad (2.61)$$

Pour des matrices incertaines  $A$  satisfaisant ces conditions on peut énoncer le corollaire suivant:

**Corollaire 2.1** Le système linéaire incertain décrit par (2.43) avec la matrice  $A$  donnée par (2.61) est quadratiquement stabilisable par gain linéaire si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive  $W$  telle que  $\forall x \in \mathcal{N}$

$$x' [A_0 W + W A_0'] x < 0 \quad (2.62)$$

avec  $\mathcal{N} \triangleq \{x \neq 0 : B'x = 0\}$ .

La démonstration suit les mêmes étapes de celle du théorème 2.3. Le corollaire 2.1 affirme simplement que, pour des systèmes avec  $A = A_0 + B \Delta A$  il suffit de regarder la paire nominale  $(A_0, B)$  en ce qui concerne la stabilisabilité.

*Remarque:* Pour la condition du théorème 2.1, on peut l'exprimer de la même manière que celle du théorème 2.3 au moyen de la matrice  $T$  définie par (2.17) (une matrice formée par des vecteurs orthonormés qui engendrent l'espace nul de  $B'$ ). La condition

$$x' [A_i W + W A_i'] x < 0, \quad \forall i = 1 \dots N, \quad \forall x \in \mathcal{N}$$

équivalent à

$$y' T' [A_i W + W A_i'] T y < 0, \quad \forall i = 1 \dots N, \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n-m}$$

ou bien que les matrices données par

$$T^i[A_i W + W A_i'] T < 0, \quad \forall i = 1 \dots N \quad (2.63)$$

soient définies positives.

### 2.3.2 Equation de Riccati

Comme précédemment on peut montrer que, dans ce cas, il existe une famille d'équations de Riccati dont la solution est unique ( $P = W^{-1}$ ) et assure donc la stabilité sur l'ensemble d'incertitude.

Prenons la relation

$$\Theta_i(W) \triangleq A_i W + W A_i' < B S B'$$

avec  $S$  symétrique définie positive. La matrice  $S$  doit vérifier cette relation pour tous les sommets  $i = 1 \dots N$ . Alors, il existe des matrices  $Q_i$ ,

$$Q_i = W^{-1} [B S B' - \Theta_i(W)] W^{-1} \quad i = 1 \dots N$$

telles que les équations de Riccati

$$A_i' P + P A_i - P B S B' P + Q_i = 0 \quad i = 1 \dots N$$

fournissent toutes la même solution  $P = P' > 0$ ,  $P = W^{-1}$ .

### 2.3.3 Commande Décentralisée

Avant de passer au problème d'optimisation et à la procédure numérique associée, nous allons faire l'extension du théorème 2.2 de commande décentralisée aux systèmes avec la matrice dynamique  $A$  incertaine.

**Théorème 2.4** Le système dynamique linéaire donné par (2.43) avec  $A \in \mathcal{D}_A$  décrit par (2.45) et, par hypothèse, une matrice d'entrée  $B$  bloc diagonale est stabilisable par une commande linéaire décentralisée s'il existe une matrice symétrique définie positive  $W_D$ , elle aussi bloc diagonale, qui satisfait

$$x^i \{A_i W_D + W_D A_i'\} x < 0 \quad i = 1 \dots N \quad (2.64)$$

pour tout  $x \in \mathcal{N}$ .



respectivement à  $\lambda_W$  et  $\lambda_{H_i}$ . Former la contrainte (linéaire par rapport aux éléments de  $W$ )

$$c_\ell(W) = \begin{cases} \nu'_W W \nu_W & \geq \varepsilon_2 & \text{si } (\varepsilon_2 - \lambda_W) > (\lambda_{H_i} + \varepsilon_3) \\ \nu'_{H_i} H_i(W) \nu_{H_i} & \leq -\varepsilon_3 & \text{si } (\varepsilon_2 - \lambda_W) \leq (\lambda_{H_i} + \varepsilon_3) \end{cases}$$

- **Etape 2:** Résoudre le problème de programmation linéaire

min  $\sigma$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 \leq w_{pp} \leq \sigma & p=1 \dots n \\ c_k(W) & k=1 \dots \ell \end{cases}$$

Si à l'étape 2 il n'existe pas de solution admissible, stop. Il n'existe pas de matrice  $W$  satisfaisant le théorème 2.3, et donc les paires  $(A, B)$  avec  $A \in \mathcal{D}_A$  ne sont pas quadratiquement stabilisables par un gain linéaire. Sinon,  $W_\ell$  étant sa solution, retourner à l'étape 1.

La convergence est assurée par le lemme 2.1.

Avec le théorème 2.3 et la procédure numérique associée nous disposons d'un outil assez performant pour traiter les systèmes dynamiques linéaires avec  $A$  incertain. Sans doute, la préoccupation principale est la vérification de la stabilisabilité, et donc le gain  $K$  peut présenter (ce qui n'est pas désirable) des éléments aux valeurs trop grandes. La détermination du gain  $K$  stabilisant se fait comme décrit auparavant, à partir d'une matrice  $S$  satisfaisant (2.53). La spécification d'une commande décentralisée peut être ajoutée au niveau de l'algorithme sans aucun problème.

Par la suite, nous présentons l'extension de ces résultats aux systèmes linéaires avec  $A$  et  $B$  incertains (et on verra que le développement adopté permettra de mieux maîtriser la norme du gain  $K$ ).

## 2.4 Systèmes Avec $A$ et $B$ Incertains

Nous considérons dans ce paragraphe des systèmes linéaires décrits par

$$\dot{x} = A(r(t))x + B(s(t))u \quad (2.66)$$

c'est-à-dire, des systèmes pour lesquels à la fois la matrice de la dynamique  $A$  et la matrice de commande  $B$  sont sujettes à l'incertitude. Nous envisagerons, tout d'abord, la possibilité d'étendre le plus directement possible les résultats des théorèmes 2.1 et 2.3.

L'extension pour le cas des "matching-conditions" où l'incertitude peut être représentée par

$$A(\cdot) = A_0 + \Delta A ; \quad \Delta A = B_0 D(r(t)) \quad (2.67)$$

$$B(\cdot) = B_0 + \Delta B ; \quad \Delta B = B_0 E(s(t)) \quad (2.68)$$

avec l'hypothèse

$$\| E(\cdot) \| < 1 \quad (2.69)$$

a été commentée dans quelques publications (voir par exemple Barmish et al [6]), mais dans le cadre des conditions suffisantes pour la stabilisabilité quadratique.

Nous regardons le cas plus général, de systèmes décrits par (2.66) avec des vecteurs d'incertitude  $r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$  et  $s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$  compris entre bornes maximales et minimales. Les éléments de  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  sont considérés comme des fonctions linéaires de  $r(t)$  et  $s(t)$ . Ainsi, les matrices  $(A, B)$  incertaines appartiennent à des ensembles convexes polyédriques de, respectivement,  $N = 2^{n_r}$  et  $M = 2^{n_s}$  sommets, c'est-à-dire,  $A \in \mathcal{D}_A$  et  $B \in \mathcal{D}_B$  avec

$$\mathcal{D}_A = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A = \sum_{i=1}^N \xi_i A_i, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\} \quad (2.70)$$

$$\mathcal{D}_B = \left\{ B \in \mathbb{R}^{n \times m} : B = \sum_{j=1}^M \beta_j B_j, \sum_{j=1}^M \beta_j = 1, \beta_j \geq 0 \right\} \quad (2.71)$$

Avec cette formulation de l'incertitude on peut énoncer le prochain théorème qui fait l'extension à ce cas particulier (ensembles polyédriques d'incertitudes) d'un résultat général dû à Barmish [4].

**Théorème 2.5** Le système linéaire incertain (2.66) avec  $A \in \mathcal{D}_A$  et  $B \in \mathcal{D}_B$  décrits par (2.70)-(2.71) est quadratiquement stabilisable si et seulement si  $\exists W = W' > 0$

tel que  $\forall i = 1 \dots N$

$$x'[A_i W + W A_i']x < 0$$

$$\forall x \neq 0 \quad \text{tel que} \quad \exists B \in \mathcal{D}_B : B'x = 0$$

La démonstration relativement technique est omise ici. Il est à noter que la condition suffisante se démontre via la preuve de l'existence d'une commande non linéaire par retour d'état. De plus, la condition est quasiment inutilisable.

### 2.4.1 Condition Nécessaire et Suffisante

Nous proposons donc un théorème qui établit une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique par commande linéaire  $u = -Kx$ .

**Théorème 2.6** Le système linéaire décrit par (2.66), (2.70) et (2.71) est quadratiquement stabilisable par une commande linéaire de retour d'état si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  telles que

$$\begin{aligned} \forall i = 1 \dots N \quad \text{et} \quad \forall j = 1 \dots M \\ A_i W + W A_i' < B_j R + R' B_j' \end{aligned} \quad (2.72)$$

Si ces conditions sont satisfaites, un gain robuste  $K$  est donné par  $K = RW^{-1}$ .

#### Démonstration

##### • Nécessité

Dire que la paire  $(A, B)$  qui satisfait (2.70)-(2.71) est quadratiquement stabilisable par retour d'état linéaire est équivalent à l'existence d'une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et d'une matrice  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que  $\forall A \in \mathcal{D}_A$  et  $\forall B \in \mathcal{D}_B$

$$(A - BK)'P + P(A - BK) < 0 \quad (2.73)$$

ce qui bien sûr implique  $\forall i = 1 \dots N$  et  $\forall j = 1 \dots M$

$$(A_i - B_j K)'P + P(A_i - B_j K) < 0 \quad (2.74)$$

et alors

$$A_i'P + PA_i < K'B_j'P + PB_jK \quad (2.75)$$

soit

$$A_iP^{-1} + P^{-1}A_i' < B_jKP^{-1} + P^{-1}K'B_j' \quad (2.76)$$

qui est identique à (2.72), avec  $W = P^{-1}$  et  $R = KW$ .

• Suffisance

A partir de (2.72), comme  $W > 0$ , il vient:

$$W^{-1}A_i + A_i'W^{-1} < W^{-1}[B_jR + R'B_j']W^{-1} \quad (2.77)$$

ou

$$\begin{aligned} (A_i - B_jRW^{-1})'W^{-1} + W^{-1}(A_i - B_jRW^{-1}) < 0 \\ \forall i = 1 \dots N \text{ et } \forall j = 1 \dots M \end{aligned} \quad (2.78)$$

alors, avec  $\xi_i \geq 0$ ,  $\sum_i \xi_i = 1$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^N \xi_i A_i - B_jRW^{-1} \right)' W^{-1} + W^{-1} \left( \sum_{i=1}^N \xi_i A_i - B_jRW^{-1} \right) < 0 \\ (A - B_jRW^{-1})' W^{-1} + W^{-1}(A - B_jRW^{-1}) < 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\forall A \in \mathcal{D}_A \text{ et } \forall j = 1 \dots M$$

et finalement, avec  $\beta_j \geq 0$ ,  $\sum_j \beta_j = 1$

$$\begin{aligned} \left( A - \sum_{j=1}^M \beta_j B_jRW^{-1} \right)' W^{-1} + W^{-1} \left( A - \sum_{j=1}^M \beta_j B_jRW^{-1} \right) < 0 \\ (A - BRW^{-1})' W^{-1} + W^{-1}(A - BRW^{-1}) < 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\forall A \in \mathcal{D}_A \text{ et } \forall B \in \mathcal{D}_B$$

Ainsi, pour toutes matrices  $A$  et  $B$  appartenant respectivement à  $\mathcal{D}_A$  et  $\mathcal{D}_B$ , il existe un gain stabilisant  $K = RW^{-1}$ .

Le théorème 2.6 établit donc une condition nécessaire et suffisante de stabilité quadratique par retour d'état linéaire d'un système linéaire incertain; son apport est surtout de transformer la condition de Lyapunov en boucle fermée, bien connue, c'est-à-dire, l'existence d'une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  et d'un gain linéaire  $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  tels que

$$\begin{aligned} \forall i = 1 \dots N \quad \text{et} \quad \forall j = 1 \dots M \\ (A_i - B_j K)' P + P (A_i - B_j K) < 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

qui est non linéaire en termes de  $P$  et  $K$ , en une condition équivalente décrite en  $W$  et  $R$ , qui présente des propriétés de convexité (linéarité), fort souhaitables pour la détermination des deux matrices recherchées.

Ceci nous permet de développer un algorithme constructif, similaire aux précédents, utilisant aussi une méthode de type plans-de-coupe et recherchant à la fois les matrices  $W$  et  $R$  satisfaisant le théorème 2.6.

Avant de passer au problème d'optimisation, nous présentons un théorème qui donne des conditions suffisantes pour une commande robuste décentralisée:

**Théorème 2.7** Le système linéaire décrit par (2.66), (2.70) et (2.71) est stabilisable par une commande linéaire de retour d'état décentralisée s'il existe une matrice symétrique définie positive  $W_D \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  et une matrice  $R_D \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  toutes les deux bloc diagonales telles que

$$\begin{aligned} \forall i = 1 \dots N \quad \text{et} \quad \forall j = 1 \dots M \\ A_i W_D + W_D A_i' < B_j R_D + R_D' B_j' \end{aligned} \quad (2.82)$$

Le gain robuste décentralisé est  $K_D = R_D W_D^{-1}$ .

Il est évident, à partir du théorème 2.6 et des formes bloc diagonales imposées aux matrices  $W_D$  et  $R_D$  que ce théorème fournit des conditions suffisantes pour une commande robuste décentralisée. Contrairement au cas où uniquement  $A$  était incertain, aucune hypothèse sur la forme de la matrice  $B$  est nécessaire.

## 2.4.2 Problème d'Optimisation et Algorithme

Un problème d'optimisation peut ainsi se formuler:

Problème d'Optimisation No. 3 (PO - 3)

$$\begin{array}{l} \min \sigma + \delta \\ \text{SOUS} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2 \leq w_{pp} \leq \sigma \\ -\delta \leq r_{qp} \leq \delta \end{array} \right. \quad (2.83)$$

$q=1 \dots m, \quad p=1 \dots n$

$$\left\{ \begin{array}{l} W \geq \varepsilon_2 \mathbf{1} \\ H_{ij}(W, R) \triangleq A_i W + W A_i' - B_j R - R' B_j' \leq -\varepsilon_3 \mathbf{1} \end{array} \right. \quad (2.84)$$

$i=1 \dots N, \quad j=1 \dots M$

Nous avons introduit  $\delta$ , une nouvelle variable scalaire d'optimisation, qui sert de borne supérieure aux valeurs absolues des éléments de  $R$  (et ainsi nous accédons à un certain "contrôle" sur la norme du gain  $K$  puisque,  $K = RW^{-1}$ ). L'autre variable à minimiser,  $\sigma$ , est maintenue, car elle empêche les éléments diagonaux de  $W$  de grandir indéfiniment.

Evidemment, le nombre de variables est maintenant égal à  $(\frac{n(n+1)}{2} + nm + 2)$ , car on recherche à la fois les deux matrices  $W$  et  $R$ . Par contre, on est capable de traiter des systèmes avec  $A$  et  $B$  incertains. De plus, intuitivement, forcer  $W \geq \mathbf{1}$  (avec  $\varepsilon_2 = 1$ ) tout en bornant les éléments  $r_{qp}$  par  $\delta$ , une des variables à minimiser, doit amener à des gains  $K$  plus satisfaisants du point de vue norme.

La procédure numérique associée devient:

**Algorithme 2.4**

- **Etape 0:**  $\ell = 0$ . Faire  $W = W_0 = \mathbf{1}_{n \times n}$  et  $R = R_0 = \mathbf{0}_{m \times n}$
- **Etape 1:** Calculer

$$\lambda_W = \lambda_{\min}(W_\ell)$$

et

$$\lambda_{H_i \cdot j \cdot} = \max_{i=1 \dots N, j=1 \dots M} \{ \lambda_{\max}(H_{ij}(W_\ell, R_\ell)) \}$$

( $i^*$  et  $j^*$  représentent les indices solutions de la maximisation indiquée ci-dessus). Si  $\lambda_W \geq \varepsilon_2$  et  $\lambda_{H_{i^*j^*}} \leq -\varepsilon_3$ , stop. La paire  $(W_\ell, R_\ell)$  satisfait les conditions du théorème (2.6). Sinon, faire  $\ell = \ell + 1$  et calculer les vecteurs propres normés  $\nu_W$  et  $\nu_{H_{i^*j^*}}$  associés respectivement à  $\lambda_W$  et  $\lambda_{H_{i^*j^*}}$ . Former la contrainte (linéaire par rapport aux éléments de  $W$  et  $R$ )

$$c_\ell(W, R) = \begin{cases} \nu'_W W \nu_W \geq \varepsilon_2 & \text{si } (\varepsilon_2 - \lambda_W) > (\lambda_{H_{i^*j^*}} + \varepsilon_3) \\ \nu'_{H_{i^*j^*}} H_{i^*j^*}(W) \nu_{H_{i^*j^*}} \leq -\varepsilon_3 & \text{si } (\varepsilon_2 - \lambda_W) \leq (\lambda_{H_{i^*j^*}} + \varepsilon_3) \end{cases}$$

• **Etape 2:** Résoudre le problème de programmation linéaire

$$\min \sigma + \delta$$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 \leq w_{pp} \leq \sigma \\ -\delta \leq r_{qp} \leq \delta & p=1 \dots n, q=1 \dots m \\ c_k(W, R) & k=1 \dots \ell \end{cases}$$

Si le problème ci-dessus ne possède pas de solution, stop. Il n'existe pas de matrices  $(W, R)$  satisfaisant le théorème 2.6. Sinon,  $(W_\ell, R_\ell)$  étant sa solution, retourner à l'étape 1.

L'algorithme 2.4 présente les mêmes caractéristiques de convergence des algorithmes précédents.

Avec le théorème 2.6 et sa procédure numérique associée, nous sommes maintenant capables de résoudre le problème de la commande robuste pour des systèmes linéaires incertains où l'incertitude peut atteindre les matrices  $A$  et  $B$ .

Nous remarquons que la formulation choisie permet de considérer des paramètres dépendants, c'est-à-dire, des éléments des matrices  $A$  et  $B$  qui sont des fonctions linéaires d'un même paramètre inconnu. Dans ce cas-là, on doit établir l'ensemble des paires  $(A_i, B_j)$  qui couvre toutes les variations paramétriques admissibles et prendre en compte, dans la procédure de recherche de  $W$  et  $R$ , uniquement les paires significatives. Ceci évite le conservatisme observé dans certains articles où l'approche impose de considérer les paramètres inconnus de  $A$  et  $B$  comme indépendants même quand ce n'est pas le cas.

De plus, la contrainte de commande décentralisée peut être facilement incorporée. Il suffit de fixer, dans l'algorithme 2.4, les éléments de  $W$  et de  $R$  hors bloc diagonal à zéro.

## 2.5 Formulation Dynamique Etendue

Les résultats que nous présentons dans cette section ne diffèrent pas fondamentalement de ceux de la section 2.4. Il s'avère que, en utilisant la formulation d'un système dynamique augmenté (proposée par Barmish [2]), il est possible de regrouper de manière synthétique tous les résultats présentés auparavant, faisant en quelque sorte la liaison entre les théorèmes 2.3 et 2.6. De plus, cette nouvelle formulation nous permet d'explicitier dans la procédure d'optimisation une variable à minimiser qui est une borne de la norme du gain  $K$  robuste recherché.

A partir d'un système linéaire incertain donné par

$$\dot{x} = A(r(t))x + B(s(t))u \quad (2.85)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}^m$ , une nouvelle formulation peut être obtenue par augmentation de la dynamique du système. Définissons

$$z \triangleq \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ; \quad \frac{d}{dt}y = u \quad (2.86)$$

et alors on arrive au système dynamique "augmenté"

$$\dot{z} = Fz + Gu \quad (2.87)$$

où  $z \in \mathbb{R}^{n+m}$  et  $u \in \mathbb{R}^m$  et

$$F \triangleq \begin{bmatrix} A(\cdot) & -B(\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad G \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{1}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

La nouvelle matrice dynamique  $F \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  regroupe tous les paramètres incertains, alors que la matrice  $G \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$  est constante. Avec  $A(\cdot) \in \mathcal{D}_A$  et  $B(\cdot) \in \mathcal{D}_B$  définis par (2.70) et (2.71), il est évident que les matrices  $F(\cdot)$  appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{D}_F$  donné par

$$\mathcal{D}_F \triangleq \left\{ F \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)} : F = \sum_{i=1}^L \gamma_i F_i, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^L \gamma_i = 1 \right\} \quad (2.89)$$

où  $L \triangleq M \times N$  (pour les cas de dépendance linéaire de paramètres,  $L < M \times N$ ). Nous présentons ici un théorème dû à Barmish [2]:

**Théorème 2.8** Le système dynamique 2.85 est stabilisable quadratiquement par une commande linéaire de retour d'état si et seulement si le système augmenté

donné par (2.87) l'est aussi.

Ainsi, pour ce qui concerne la stabilisabilité quadratique d'un système linéaire incertain par une commande linéaire, toutes les études peuvent être menées à partir de l'analyse du système augmenté équivalent. Nous présentons donc le théorème (dérivé du théorème 2.3):

**Théorème 2.9** Le système linéaire dynamique décrit par (2.87) est quadratiquement stabilisable si et seulement s'il existe une matrice  $\mathcal{W} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  symétrique donnée par

$$\mathcal{W} \triangleq \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

avec la sous-matrice  $W_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  symétrique définie positive telle que

$$\begin{aligned} z'[F_l \mathcal{W} + \mathcal{W} F_l']z < 0 \quad \forall l = 1 \dots L \\ \forall z \neq 0 \text{ tel que } G'z = 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

Une matrice  $\mathcal{W}$  satisfaisant les conditions ci-dessus étant trouvée, le gain  $K$  stabilisant est donné par  $K = W_2' W_1^{-1}$ .

La différence essentielle avec le théorème 2.3 est qu'ici (comme on le verra dans la preuve) il n'est plus nécessaire d'exiger que  $\mathcal{W}$  soit définie positive, seule est nécessaire la positivité de la sous matrice  $W_1$ .

#### Démonstration

Nous allons démontrer que la condition du théorème 2.9 est en vérité totalement équivalente à celle du théorème 2.6.

Soit  $z$  un vecteur appartenant à  $\mathfrak{R}^{n+m}$ , et donc  $z$  peut s'écrire

$$z' = [x' \quad y']$$

avec  $x \in \mathfrak{R}^n$  et  $y \in \mathfrak{R}^m$ . Alors,

$$G'z = 0 \iff \begin{bmatrix} 0_{m \times n} & \mathbf{1}_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad (2.92)$$

et par conséquent  $z \in \{z \neq 0 : G'z = 0\}$  implique  $z' = [x' \ 0]$ . Maintenant, si on développe

$$[x' \ 0] [F_l W + W F_l'] \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (2.93)$$

(rappelant que  $F_l$  contient toutes les paires  $(A_i, B_j)$ ), il vient

$$\begin{aligned} [x' \ 0] & \left\{ \begin{bmatrix} A_i & -B_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i' & 0 \\ -B_j' & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \\ [x' \ 0] & \left\{ \begin{bmatrix} A_i W_1 - B_j W_2' & A_i W_2 - B_j W_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 A_i' - W_2 B_j' & 0 \\ W_2' A_i' - W_3 B_j' & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \\ [x' \ 0] & \left\{ \begin{bmatrix} A_i W_1 + W_1 A_i' - B_j W_2' - W_2 B_j' & A_i W_2 - B_j W_3 \\ W_2' A_i' - W_3 B_j' & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \\ & = x' [A_i W_1 + W_1 A_i' - B_j W_2' - W_2 B_j'] x < 0 \end{aligned}$$

Donc, finalement,  $\forall l = 1 \dots L$

$$z' [F_l W + W F_l'] z < 0 \quad \forall z : G' z = 0 \quad (2.94)$$

est tout à fait équivalent à

$$A_i W_1 + W_1 A_i' - B_j W_2' - W_2 B_j' < 0 \quad (2.95)$$

$\forall i = 1 \dots N$ ,  $j = 1 \dots M$ , avec  $W_1 > 0$ . On retrouve ici la condition du théorème 2.3, avec  $W_1 = W$  et  $W_2' = R$ . Conséquemment, le gain robuste stabilisant est donné par  $K = W_2' W_1^{-1}$ .

Une autre formulation équivalente du théorème 2.9 est:

**Théorème 2.10** Le système linéaire dynamique décrit par (2.87) est stabilisable quadratiquement si et seulement s'il existe une matrice  $\mathcal{W} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  symétrique définie par (2.90) telle que  $\forall l = 1 \dots L$

$$H_l(\mathcal{W}) \triangleq \Gamma' [F_l \mathcal{W} + \mathcal{W} F_l'] \Gamma < 0 \quad (2.96)$$

où  $\Gamma \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times n}$  est une matrice formée par des vecteurs orthonormés qui engendrent l'espace nul de  $G'$ .

Le rapprochement entre  $\Gamma$  et la matrice  $T$  de l'équation (2.63) est évident.

Bien que non strictement nécessaire du point de vue de l'analyse de stabilité d'une paire  $(A, B)$  incertaine, il est peut-être intéressant de fixer  $\mathcal{W} > 0$ . Il faut dire qu'imposer cette contrainte supplémentaire ne vient absolument pas restreindre le domaine de solutions existantes; il est possible de montrer que s'il existe une solution  $(W, R)$  satisfaisant aux conditions du théorème 2.6, alors il existe également une solution du théorème 2.9 pour  $\mathcal{W} > 0$ . Et cette exigence peut fournir, d'une manière plus rigoureuse, la solution pour le problème de synthèse d'un gain stabilisant à norme minimale.

En effet, des conditions de positivité d'une matrice symétrique on retire

$$\mathcal{W} > 0 \iff \begin{cases} W_1 > 0 \\ W_3 > W_2' W_1^{-1} W_2 \end{cases} \quad (2.97)$$

Soit la deuxième condition de (2.97)

$$\begin{aligned} W_3 &> W_2' W_1^{-1} W_1 W_1^{-1} W_2 \\ W_3 &> K W_1 K' \end{aligned} \quad (2.98)$$

et donc, si de plus on exige  $W_1 \geq \mathbf{1}_{n \times n}$ , on a

$$W_3 > K K' \quad (2.99)$$

qui est alors une "borne" supérieure pour la matrice  $K K'$ .

Du point de vue du problème d'optimisation associé, un choix approprié et simplifiant pour la forme de  $W_3$  est:

$$W_3 = \eta \mathbf{1}_{m \times m} \quad (2.100)$$

Il présente l'avantage de ne pas augmenter le nombre de variables à traiter (par rapport au problème PO - 3) et  $\eta$  devient une borne supérieure (à minimiser) pour la norme du gain  $K$ ; en effet

$$\|K'\|^2 \triangleq \lambda_{\max}[KK'] < \eta \quad (2.101)$$

Nous répétons que ce choix a priori de  $W_3$  peut être fait sans aucune perte de généralité.

### 2.5.1 Problème d'Optimisation et Algorithme

Le problème d'optimisation est défini comme suit:

**Problème d'Optimisation No. 4 (PO - 4)**

$$\begin{array}{l} \min \sigma + \eta \\ \text{sous} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq \omega_{pp} \leq \sigma \quad p=1 \dots n \\ \omega_{pp} = \eta, \omega_{pq} = 0 \quad p, q = n+1 \dots n+m \end{array} \right. \quad (2.102)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W \geq \varepsilon \mathbf{1}_{(n+m) \times (n+m)} \\ W_1 \geq \mathbf{1}_{n \times n} \\ H_i(W) \leq -\varepsilon \mathbf{1}_{(n+m) \times (n+m)} \quad i=1 \dots L \end{array} \right. \quad (2.103)$$

avec  $H_i(W)$  donné par (2.96) et  $\varepsilon > 0$  un scalaire librement choisi, juste pour garantir l'inégalité stricte exigée par les conditions du théorème 2.9. Les conditions sur les éléments de  $W_3$ , explicitées dans (2.102), n'interviennent pas au niveau du problème d'optimisation, car il s'agit simplement d'une affectation ( $W_3 = \eta \mathbf{1}_{m \times m}$ ). La variable d'optimisation à minimiser  $\sigma$  est maintenue, car elle joue un rôle important, empêchant les éléments diagonaux de  $W_1$  de tendre vers l'infini.

Nous insistons sur le fait que l'algorithme 2.5, exposé par la suite, ne représente point une augmentation de la complexité du problème à résoudre.

**Algorithme 2.5**

- **Etape 0:**  $\ell = 0$ . Faire  $\mathcal{W} = \mathcal{W}^0$

$$\mathcal{W}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}$$

- **Etape 1:** Calculer

$$\lambda_{W_1} = \lambda_{\min}(W_1^\ell)$$

$$\lambda_{\mathcal{W}} = \lambda_{\min}(\mathcal{W}^\ell)$$

$$\lambda_{H_{l^*}} = \max_{i=1 \dots L} \{ \lambda_{\max}(H_i(\mathcal{W}^\ell)) \}$$

où  $l^*$  représente l'indice solution de la maximisation indiquée ci-dessus. Si  $\lambda_{W_1} \geq 1$ ,  $\lambda_{\mathcal{W}} \geq \varepsilon$  et  $\lambda_{H_{l^*}} \leq -\varepsilon$ , stop. La matrice  $\mathcal{W}^\ell$  satisfait les conditions du théorème 2.9. Le gain robuste est donné par  $K = W_2' W_1^{-1}$  et  $\|K'\|^2 < \eta$ . Sinon, faire  $\ell = \ell + 1$  et calculer les vecteurs propres normés associés, respectivement  $\nu_{W_1}$ ,  $\nu_{\mathcal{W}}$  et  $\nu_{H_{l^*}}$ . Définissons

$$m \triangleq \max \left\{ \underbrace{(1 - \lambda_{W_1})}_a, \underbrace{(\varepsilon - \lambda_{\mathcal{W}})}_b, \underbrace{(\lambda_{H_{l^*}} + \varepsilon)}_c \right\}$$

Former la contrainte (linéaire par rapport aux éléments de  $\mathcal{W}$ )

$$c_\ell(\mathcal{W}) = \begin{cases} \nu_{W_1}' W_1 \nu_{W_1} \geq 1 & \text{si } m = a \\ \nu_{\mathcal{W}}' \mathcal{W} \nu_{\mathcal{W}} \geq \varepsilon & \text{si } m = b \\ \nu_{H_{l^*}}' H_{l^*}(\mathcal{W}) \nu_{H_{l^*}} \leq -\varepsilon & \text{si } m = c \end{cases}$$

- **Etape 2:** Résoudre le problème de programmation linéaire

$$\min \sigma + \eta$$

$$\begin{cases} 1 \leq \omega_{pp} \leq \sigma & p=1 \dots n \\ \omega_{pp} = \eta, \omega_{pq} = 0 & p, q=n+1 \dots n+m \\ c_k(\mathcal{W}), & k=1 \dots \ell \end{cases}$$

Si à l'étape 2 il n'existe pas de solution admissible, **stop**. Alors, il n'existe pas de matrice  $\mathcal{W}$  satisfaisant le théorème 2.9, et donc les paires  $(A, B)$ ,  $A \in \mathcal{D}_A$  et  $B \in \mathcal{D}_B$  ne sont pas quadratiquement stabilisables par un gain linéaire. Sinon, la solution étant  $\mathcal{W}^l$ , retourner à l'étape 1.

*Remarques:* La tâche de calcul requise par ce dernier algorithme est à peine supérieure à celle de l'algorithme 2.4 car ici il est nécessaire, par itération, de calculer trois paires de valeurs et vecteurs propres. Comme précédemment, une seule contrainte linéaire est ajoutée au problème simplexe à chaque "coupe" — on choisit la contrainte qui a été la plus violée; les variables  $\delta$  ont disparu, n'ayant plus d'utilité ici. Maintenant, c'est  $\eta$  qui agit sur la norme des éléments de  $W_2$ , indirectement (et directement sur  $\|K'\|$ ). La matrice  $\Gamma$  est constante tout au long des itérations, car  $G$  est constant. Pour traiter des paramètres dépendants il faut simplement construire  $F$  en accord avec les paires  $(A_i, B_i)$  nécessaires à analyser.

La prise en compte du problème de commande décentralisée se fait de manière analogue à celle de la formulation non étendue, c'est-à-dire, en imposant  $\mathcal{W}_1$  et  $\mathcal{W}_2$  bloc diagonaux.

Avec ce type de formulation dite étendue on a un "contrôle" presque direct sur la norme du gain et ceci sans pratiquement aucun surcoût du point de vue calcul.

## 2.5.2 Equation de Riccati

Pour le développement présenté ici et avec  $\mathcal{W}$  définie positive, il est facile de montrer qu'il existe une équation de Riccati associée à la représentation dynamique augmentée des systèmes incertains. Définissons

$$\Theta_l(\mathcal{W}) \triangleq F_l \mathcal{W} + \mathcal{W} F_l' \quad (2.104)$$

$\forall l = 1 \dots L$ . Alors, la condition

$$z'[F_l \mathcal{W} + \mathcal{W} F_l']z < 0 \quad : \quad G'z = 0$$

peut s'écrire

$$\Theta_l(\mathcal{W}) < G R_l^{-1} G' \quad (2.105)$$

avec  $\mathcal{R}_l^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  des matrices définies positives à déterminer. Il est évident que pour une matrice  $\mathcal{R}$  symétrique définie positive telle que

$$\mathcal{R}^{-1} \geq \mathcal{R}_l^{-1} \quad \forall l = 1 \dots L$$

la relation

$$\Theta_l(\mathcal{W}) < G\mathcal{R}^{-1}G'$$

est vérifiée pour tout  $l, l = 1 \dots L$ . Alors, avec les matrices  $\mathcal{Q}_l$  symétriques définies positives données par

$$\mathcal{Q}_l \triangleq \mathcal{W}^{-1} [G\mathcal{R}^{-1}G' - \Theta_l(\mathcal{W})] \mathcal{W}^{-1} \quad (2.106)$$

les équations de Riccati

$$F_l' P_l + P_l F_l - P_l G \mathcal{R}^{-1} G' P_l + \mathcal{Q}_l = 0 \quad (2.107)$$

possèdent toutes la même solution symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ , avec  $P_l = \mathcal{W}^{-1} P, l = 1 \dots L$ .

En conséquence, il est possible de définir un problème linéaire quadratique pour chacune des matrices  $F_l$ , dont la solution optimale  $P$  ne dépend pas de l'indice  $l$ .

### 2.5.3 Commande Décentralisée

Il est facile, à partir du théorème 2.9, de formuler un théorème qui donne des conditions suffisantes pour une commande décentralisée robuste à partir de la représentation augmentée d'un système linéaire incertain.

**Théorème 2.11** Le système linéaire dynamique décrit par (2.87) est quadratiquement stabilisable par une commande linéaire décentralisée s'il existe une matrice symétrique  $\mathcal{W}_D \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  définie par

$$\mathcal{W}_D \triangleq \begin{bmatrix} W_{D1} & W_{D2} \\ W_{D2}' & W_3 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

avec les sous matrices  $W_{D1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique définie positive bloc diagonale et  $W_{D2}$  bloc diagonale telles que

$$\begin{aligned} z'[F_i W_D + W_D F_i']z < 0 \quad \forall i = 1 \dots L \\ \forall z \neq 0 \text{ tel que } G'z = 0 \end{aligned} \tag{2.109}$$

Ce théorème décrit des conditions analogues à celles imposant  $W_D$  et  $R_D$  dans le théorème 2.7, car si une matrice  $W_D$  existe le gain robuste  $K_D = W_{D2}' W_{D1}^{-1}$  sera forcément bloc diagonal. L'avantage se situe au niveau de la norme du gain  $K$ , car on peut imposer que  $W_D$  soit définie positive, et comme aucune hypothèse n'est nécessaire sur  $W_3$ , le même raisonnement pour le choix  $W_3 = \eta \mathbf{1}$  est valable, garantissant  $\|K_D'\| < \eta$ .

## 2.6 Conclusion

Tout au long de ce chapitre nous avons traité des systèmes dynamiques linéaires continus. Nous donnons, au départ, une nouvelle méthode de synthèse de commande et d'analyse de stabilité facilement applicable, qui présente par rapport aux méthodes actuelles existantes certains avantages. La base de la technique repose sur une formulation relativement originale du problème mettant en évidence ses propriétés de convexité. Nous proposons ainsi une procédure numérique performante, qui utilise une technique de plans-de-coupe.

Parmi les avantages de l'approche figure la possibilité de la prise en compte de certaines spécifications au niveau de la commande stabilisante, par une définition appropriée du problème d'optimisation associé. C'est ainsi que l'on arrive à contrôler la norme du gain de contre-réaction; on peut également traiter des problèmes de commande décentralisée.

Ensuite, nous avons présenté un certain nombre de résultats concernant le régulateur robuste. D'abord ont été traités les problèmes où seule la matrice de la dynamique du système est incertaine. Puis, un théorème établit des conditions de stabilité pour les systèmes avec  $A$  et  $B$  incertains. Une procédure numérique a été adaptée, tirant largement parti des caractéristiques de convexité des contraintes. Dans toutes les procédures présentées, il est possible d'inclure la contrainte de décentralisation de la commande.

Pour finir, en utilisant une formulation étendue il a été possible de "jeter un pont" pour relier les résultats obtenus. Parmi les avantages de cette formulation

citons le fait qu'elle permet une prise en compte plus naturelle du problème de contrôle de la norme du gain et enfin, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, c'est cette formulation qui permet l'extension de certains résultats au cas des systèmes discrets.



## Chapitre 3

# Stabilisabilité et Commande Robuste — Systèmes Discrets

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons des résultats portant sur la stabilisabilité et la synthèse d'une commande robuste pour des systèmes dynamiques linéaires discrets décrits par des équations d'état et, donc, pouvant être caractérisés par une paire  $(A, B)$ . Les deux matrices peuvent être sujettes à des incertitudes.

L'approche utilisée, similaire à celle du cas continu, associe au système étudié une fonction quadratique de Lyapunov. A cause d'une particularité de l'équation de Lyapunov discrète, il n'est pas possible de formuler des conditions de stabilisabilité à partir du système original. Ainsi, le développement suit ici celui de la section 2.5 du deuxième chapitre. D'abord, pour des systèmes précisément connus, nous partons directement du système décrit par une formulation dite "étendue" (incorporant les deux matrices  $A$  et  $B$  dans une nouvelle matrice dynamique augmentée  $F$ ) et nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisabilité par retour linéaire d'état. Ces conditions associent la stabilisabilité à l'existence d'une fonction quadratique de Lyapunov; un gain linéaire est immédiatement obtenu à partir de la matrice de Lyapunov. Nous montrons que c'est justement la formulation étendue qui permet de contourner certains inconvénients de l'équation discrète de Lyapunov.

Comme précédemment, un problème d'optimisation est associé aux conditions théoriques; la minimisation d'une borne supérieure de la norme du gain robuste  $K$  y est incorporée. L'algorithme itératif en découle immédiatement; les propriétés de convexité du problème assurent l'obtention d'une solution (si elle existe). L'extension aux systèmes linéaires discrets incertains est alors immédiate.

La stabilité du système en boucle fermée (avec le gain robuste associé) est garantie au moyen d'une fonction quadratique de Lyapunov unique associée au système, donc nous pouvons parler de stabilisabilité quadratique pour les systèmes discrets.

La fonction de Lyapunov associée au système reste convexe par rapport aux matrices dynamiques "augmentées". La recherche d'une solution unique valable pour un nombre fini de sommets du polyèdre d'incertitudes considéré assure, quand elle existe, la stabilisabilité sur tout l'ensemble d'incertitudes.

Finalement, les mêmes caractéristiques discutées précédemment permettent de prendre en compte les contraintes de structure sur le gain obtenu. Ceci nous amène à formuler des conditions suffisantes pour l'existence d'une commande décentralisée pour des systèmes discrets, basées sur des conditions qui imposent une structure bloc diagonale pour les matrices recherchées. Applicable parfaitement aux systèmes incertains, cette formulation garde les avantages de ne pas exiger une structure bloc diagonale pour la matrice d'entrée  $B$  du système et d'incorporer la minimisation de la norme du gain  $K$  décentralisé dans la procédure numérique.

## 3.2 Stabilisabilité

Considérons d'abord un système linéaire discret, précisément connu, décrit par

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (3.1)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur des variables d'état et  $u_k \in \mathbb{R}^m$  est celui des variables de commande.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont respectivement la matrice dynamique et la matrice d'entrée du système. Le système (3.1) est dit stabilisable s'il existe un gain  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tel que le système en boucle fermée

$$x_{k+1} = (A - BK)x_k \quad (3.2)$$

soit asymptotiquement stable (toutes les valeurs propres de  $(A - BK)$  sont à l'intérieur du cercle unitaire).

Ceci est équivalent à l'existence d'une fonction quadratique de Lyapunov  $v(x) = x'Px$  associé au système en boucle fermée, avec  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice symétrique définie positive telle que

$$(A - BK)'P(A - BK) - P < 0 \quad (3.3)$$

(l'accroissement  $\nabla v = v_{k+1} - v_k$  est défini négatif).

Avant de poursuivre vers la condition "étendue" de stabilisabilité pour les systèmes discrets, nous présentons un résultat concernant la fonction de Lyapunov associé à un système discret stable.

**Théorème 3.1** Soit le système discret donné par

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (3.4)$$

où la matrice  $A$  est asymptotiquement stable. Il existe donc une matrice  $P$  symétrique définie positive qui vérifie

$$A'PA - P < 0 \quad (3.5)$$

Alors, la relation

$$AWA' - W < 0 \quad (3.6)$$

associée au système adjoint du système (3.4) est toujours vérifiée avec  $W = P^{-1}$  et inversement.

Démonstration:

Si (3.5) est vérifiée, on peut écrire

$$A'PA - P = -Q \quad (3.7)$$

avec  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice définie positive. Prenons l'inverse des deux cotés,

$$(A'PA - P)^{-1} = -Q^{-1} \quad (3.8)$$

En utilisant le lemme d'inversion de matrices <sup>1</sup>, il vient

$$P^{-1}A'(AP^{-1}A' - P^{-1})^{-1}AP^{-1} - P^{-1} = -Q^{-1} \quad (3.9)$$

$$P^{-1}A'(AP^{-1}A' - P^{-1})^{-1}AP^{-1} = P^{-1} - Q^{-1} \quad (3.10)$$

<sup>1</sup> $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$

soit

$$(AP^{-1}A' - P^{-1})^{-1} = A'^{-1}P(P^{-1} - Q^{-1})PA^{-1}$$

que l'on peut réécrire

$$AP^{-1}A' - P^{-1} = -R \quad (3.11)$$

avec

$$R^{-1} = A'^{-1}P(Q^{-1} - P^{-1})PA^{-1}$$

$R^{-1}$  définie positive car  $P \geq Q$  (évident d'après (3.7)) et donc  $P^{-1} \leq Q^{-1}$ . Finalement, avec  $W = P^{-1}$ , il vient

$$AWA' - W < 0 \quad (3.12)$$

et le théorème est démontré.

L'équation de Lyapunov discrète, associée à un système en boucle fermée, présente des non linéarités par rapport aux matrices  $A$  et  $B$ , ce qui ne permet pas le même développement théorique que celui utilisé pour les systèmes continus. Nous définissons donc le système "étendu", associé au système de départ:

$$z_{k+1} = Fz_k + Gu_k \quad (3.13)$$

où  $z_k \in \mathbb{R}^{n+m}$  est le nouveau vecteur d'état et  $u_k \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande du système original. Les matrices  $F \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  et  $G \in \mathbb{R}^{(n+m) \times m}$ , comme pour le cas continu, sont données par:

$$F \triangleq \begin{bmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G \triangleq \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ \mathbf{1}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

et il est clair que

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad y_{k+1} = u_k \quad (3.15)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème:

**Théorème 3.2** Le système dynamique linéaire discret décrit par (3.1) est stabilisable si et seulement s'il existe une matrice symétrique semi-définie positive  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  donnée par

$$\mathcal{W} \triangleq \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.16)$$

avec la sous matrice  $W_1$  symétrique définie positive telle que

$$z'(FWF' - \mathcal{W})z < 0 \quad (3.17)$$

pour tout  $z \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+m}$  tel que  $G'z = 0$ .

Démonstration

• Nécessité

Le fait que le système (3.1) est stabilisable implique qu'il existe  $P = P' > 0$  et  $K$  tels que

$$(A - BK)P(A - BK)' - P < 0 \quad (3.18)$$

qu'on peut écrire

$$x'[(A - BK)P(A - BK)' - P]x \leq -\epsilon x'x \quad (3.19)$$

avec  $\epsilon > 0$  arbitraire. Maintenant, à partir de l'équation (3.19) on montre qu'il est possible de construire une matrice  $\mathcal{W}$  satisfaisant le théorème 3.2. Il est facile de vérifier que l'inégalité (3.19) peut aussi s'exprimer par

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & 0 \\ -B' & 0 \end{bmatrix} - \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \leq -\epsilon x'x \end{aligned} \quad (3.20)$$

L'équation (3.20) fournit une matrice  $\mathcal{W}$  symétrique semi-définie positive, donnée par:

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} P & PK' \\ KP & KPK' \end{bmatrix}$$

qui satisfait les conditions du théorème 3.2 pour tout  $z \neq 0$  :  $G'z = 0$ .

• Suffisance

Soit  $z \in \mathbb{R}^{n+m}$  tel que  $G'z = 0$ . Alors,

$$z = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

En développant l'expression (3.17) avec la matrice  $\mathcal{W}$  symétrique semi-définie positive donné par (3.16), on obtient

$$\begin{bmatrix} x' & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & 0 \\ -B' & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.21)$$

qui, réécrite, donne

$$x' [AW_1A' - AW_2B' - BW_2'A' + BW_3B' - W_1] x < 0 \quad (3.22)$$

La relation (3.22) peut s'écrire:

$$x' \left\{ (A - BW_2'W_1^{-1})W_1(A - BW_2'W_1^{-1})' - W_1 + \right. \\ \left. B[W_3 - W_2'W_1^{-1}W_2]B' \right\} x < 0 \quad (3.23)$$

et le terme  $B[W_3 - W_2'W_1^{-1}W_2]B'$  est toujours supérieur ou égal à zéro car toutes les matrices satisfaisant (3.16) vérifient

$$\mathcal{W} \geq 0 \implies W_3 \geq W_2'W_1^{-1}W_2$$

Alors, on obtient

$$x' \left[ (A - BW_2'W_1^{-1})W_1(A - BW_2'W_1^{-1})' - W_1 \right] x < 0 \quad (3.24)$$

et finalement avec  $P = W_1$  et  $K = W_2'W_1^{-1}$  on vérifie l'équation de Lyapunov (3.18) démontrant que le système décrit par la paire  $(A, B)$ , équation 3.1, est stabilisable, ce qui complète la preuve du théorème.

L'observation importante ici est que maintenant  $\mathcal{W}$  doit impérativement être semi-définie positive, ce qui est une différence par rapport au cas continu où  $W_3$  était quelconque. De plus, imposer une forme pré-choisie pour  $W_3$ , par exemple

$W_3 = \eta \mathbf{1}$ , bien que très convenable du point de vue de la procédure numérique, ne fournit que des conditions suffisantes de stabilisabilité.

Ce théorème ne constitue aucunement un résultat nouveau et énonce simplement le résultat bien connu concernant l'existence d'une fonction quadratique de Lyapunov associée à un système stable. L'intérêt de la formulation étendue deviendra évident au paragraphe suivant, lorsqu'il s'agira de dériver la condition nécessaire et suffisante de stabilité quadratique relative aux systèmes discrets incertains.

L'avantage de cette formulation est que, comme précédemment, des propriétés de convexité de la relation (3.17) par rapport aux éléments de  $\mathcal{W}$  permettent la mise en œuvre des procédures de programmation linéaire qui construisent itérativement une matrice  $\mathcal{W}$  satisfaisant les propriétés du théorème 3.2.

Comme pour le cas continu, définissons  $\Gamma \in \mathbb{R}^{(n+m) \times n}$  comme étant une matrice composée par des vecteurs orthonormés qui engendrent l'espace nul de  $G'$ . Les conditions du théorème 3.2 peuvent donc s'écrire:

$$H(\mathcal{W}) \triangleq \Gamma' [F\mathcal{W}F' - \mathcal{W}] \Gamma < 0 \quad (3.25)$$

Dérivons le problème d'optimisation associé:

**Problème d'Optimisation No. 5 (PO - 5)**

$$\begin{array}{l} \min \sigma + \eta \\ \text{sous} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq \omega_{pp} \leq \sigma \quad p=1 \dots n \end{array} \right. \quad (3.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{W} \geq \mathbf{0} \\ W_1 \geq \mathbf{1}_{n \times n} \\ W_3 \leq \eta \mathbf{1}_{m \times m} \\ H(\mathcal{W}) \leq -\varepsilon \mathbf{1}_{(n+m) \times (n+m)} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

avec  $\varepsilon > 0$  un scalaire arbitrairement choisi (juste pour assurer l'inégalité stricte

de (3.17)). Un algorithme similaire aux précédents peut être associé au problème d'optimisation PO - 5. Toutes les considérations faites pour le cas continu restent valables. Avec le choix  $W_3 = \eta \mathbf{1}$ , l'algorithme itératif associé est exactement le même que celui du cas continu (algorithme 2.5), simplement on utilise la définition de  $H(\mathcal{W})$  donnée par (3.25). Bien sûr, dans ce cas la procédure fournit des conditions suffisantes pour la stabilité.

La considération de contraintes de décentralisation sur le gain  $K$  est parfaitement incorporable, en imposant des structures bloc diagonales à  $\mathcal{W}_1$  et  $\mathcal{W}_2$ . La minimisation d'une borne supérieure pour la norme du gain  $K$  est toujours présente.

### 3.3 Systèmes Incertains

Dans cette section nous présentons l'extension des résultats précédents aux systèmes linéaires discrets incertains. On considère un système donné par

$$x_{k+1} = A(r(t))x_k + B(s(t))u_k \quad (3.28)$$

où les éléments de  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  sont respectivement des fonctions linéaires des paramètres incertains  $r(t)$  et  $s(t)$ . Ces paramètres,  $r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$  et  $s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$ , possèdent des bornes inférieures et supérieures pour chacune de leurs composantes. Ceci définit des polyèdres convexes comme domaine d'incertitude. Comme pour le cas continu,  $A$  et  $B$  appartiennent à un domaine parallélépipédoïdal défini par ses sommets  $(A_i, B_j)$ ,  $A \in \mathcal{D}_A$  et  $B \in \mathcal{D}_B$  comme décrits par (2.70) et (2.71).

En utilisant la définition d'un système dynamique augmenté associé à (3.28), on obtient:

$$z_{k+1} = Fz_k + Gu_k \quad (3.29)$$

Ainsi, ces systèmes sont caractérisés par une paire  $(F, G)$  où

$$F \triangleq \begin{bmatrix} A(\cdot) & -B(\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad G \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{1}_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

et  $F \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  est la seule à dépendre de paramètres incertains. Comme dans le chapitre 2, on considère  $F(\cdot) \in \mathcal{D}_F$  où

$$\mathcal{D}_F \triangleq \left\{ F \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)} : F = \sum_{i=1}^L \gamma_i F_i, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^L \gamma_i = 1 \right\} \quad (3.31)$$

avec  $L \leq N \times M$  ( $N = 2^n$  et  $M = 2^n$ , respectivement le nombre de sommets des polyèdres d'incertitude sur  $A$  et sur  $B$ ).

Donnons d'abord la définition de stabilisabilité quadratique pour des systèmes discrets incertains:

**Définition 3.1** Un système linéaire discret incertain décrit par (3.28) avec  $A \in \mathcal{D}_A$  et  $B \in \mathcal{D}_B$  donnés par (2.70) et (2.71) est quadratiquement stabilisable par retour d'état linéaire s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et un gain constant  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tels que

$$(A - BK)'P(A - BK) - P < 0$$

$$\forall A \in \mathcal{D}_A \quad , \quad \forall B \in \mathcal{D}_B \quad (3.32)$$

Cette définition, avec le résultat du théorème 3.1, est absolument équivalente à l'existence des matrices  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que  $\forall A \in \mathcal{D}_A$  et  $\forall B \in \mathcal{D}_B$

$$(A - BK)W(A - BK)' - W < 0$$

Avant de passer au théorème qui établit des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité quadratique pour des systèmes discrets incertains, nous donnons le lemme suivant, qui montre la convexité de  $FWF'$  par rapport à  $F$ .

**Lemme 3.1** Soit  $W \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  une matrice symétrique semi-définie positive; alors

$$FWF' \leq \sum_{i=1}^L \gamma_i (F_i W F_i') \quad , \quad \forall F \in \mathcal{D}_F$$

$$\sum_{i=1}^L \gamma_i = 1 \quad (3.33)$$

### Démonstration

Pour démontrer (3.33), nous allons considérer  $L = 2$  (et, par récurrence, la démonstration du cas  $L$  quelconque est immédiate). Soit donc  $F \in \mathcal{D}_F^{L=2}$  donné par

$$F = \gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 \quad , \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \quad (3.34)$$

Nous allons montrer que  $\forall F \in D_P^{L=2}$ , la relation

$$F\mathcal{W}F' \leq \gamma_1 F_1 \mathcal{W} F_1' + \gamma_2 F_2 \mathcal{W} F_2' \quad (3.35)$$

est toujours valable. Avec (3.34), l'expression (3.35) devient

$$(\gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2) \mathcal{W} (\gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2)' \leq \gamma_1 F_1 \mathcal{W} F_1' + \gamma_2 F_2 \mathcal{W} F_2' \quad (3.36)$$

Développant, on obtient

$$\gamma_1^2 F_1 \mathcal{W} F_1' + \gamma_1 \gamma_2 F_1 \mathcal{W} F_2' + \gamma_2 \gamma_1 F_2 \mathcal{W} F_1' + \gamma_2^2 F_2 \mathcal{W} F_2' - \gamma_1 F_1 \mathcal{W} F_1' - \gamma_2 F_2 \mathcal{W} F_2' \leq 0$$

soit

$$\gamma_1(\gamma_1 - 1) F_1 \mathcal{W} F_1' + \gamma_2(\gamma_2 - 1) F_2 \mathcal{W} F_2' + \gamma_1 \gamma_2 F_1 \mathcal{W} F_2' + \gamma_2 \gamma_1 F_2 \mathcal{W} F_1' \leq 0$$

qui donne, avec  $\gamma_2 = 1 - \gamma_1$ :

$$\gamma_1(\gamma_1 - 1) [F_1 \mathcal{W} F_1' + F_2 \mathcal{W} F_2' - F_1 \mathcal{W} F_2' - F_2 \mathcal{W} F_1'] \leq 0$$

et finalement

$$\gamma_1(\gamma_1 - 1) [(F_1 - F_2) \mathcal{W} (F_1 - F_2)'] \leq 0 \quad (3.37)$$

où  $\gamma_1(\gamma_1 - 1)$  est toujours négatif ou nul car  $\gamma_1 \in [0, 1]$  et la forme quadratique

$$[(F_1 - F_2) \mathcal{W} (F_1 - F_2)']$$

est semi-définie positive car  $\mathcal{W} \geq 0$ . La relation (3.37) se vérifiant, par récurrence (3.35) est valable et le lemme est démontré.

Le théorème est une extension immédiate du théorème 3.2:

**Théorème 3.3** Le système linéaire discret incertain décrit par (3.28) est quadratiquement stabilisable si et seulement s'il existe une matrice symétrique semi-définie positive  $\mathcal{W} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m)}$  donnée par

$$\mathcal{W} \triangleq \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.38)$$

avec  $W_1 > 0$  telle que

$$z'[F_l W F_l' - W]z < 0 \quad (3.39)$$

pour tout  $z \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+m}$  tel que  $G'z = 0$  et  $\forall l = 1 \dots L$ .

Le théorème 3.3 se démontre en établissant l'équivalence entre les équations:

$$(A_i - B_j K)W_1(A_i - B_j K)' - W_1 < 0 \quad \forall i=1 \dots N, j=1 \dots M$$

et

$$z'[F_l W F_l' - W]z < 0 \quad \forall z : G'z = 0, \forall l=1 \dots L$$

avec  $W$  semi-définie positive et  $W_1$  définie positive. Ensuite, avec le lemme 3.1, il est facile de constater que

$$z'[F W F - W]z = z' \left[ \left( \sum_{l=1}^L \gamma_l F_l \right) W \left( \sum_{l=1}^L \gamma_l F_l \right)' - W \right] z \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^L \gamma_l z'[F_l W F_l' - W]z < 0 \quad \forall F \in D_F$$

et ceci, sachant que  $W_1^{-1}$  est une matrice de Lyapunov pour le système donné par (3.28), conclut la démonstration du théorème.

Le problème d'optimisation est dérivé immédiatement du problème PO - 5, avec la contrainte

$$H_l(W) \triangleq \Gamma'[F_l W F_l' - W]\Gamma < 0 \quad \forall l = 1 \dots L$$

où  $\Gamma$  est une matrice formée par des vecteurs orthonormés engendrant l'espace nul de  $G'$ . Si on fait le choix  $W_3 = \eta \mathbf{1}$ , le problème d'optimisation ainsi que l'algorithme sont exactement les mêmes que pour le cas continu incertain, avec  $H_l(W)$  donné ci-dessus.

Incorporer la contrainte de décentralisation se fait de manière totalement naturelle, en imposant aux sous-matrices  $W_1$  et  $W_2$  d'être bloc diagonales.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'extension des résultats précédents aux systèmes linéaires discrets. On a dû adopter directement la formulation dynamique étendue, car l'équation de Lyapunov associée aux systèmes discrets est non linéaire par rapport à la matrice dynamique.

Nous donnons d'abord une équivalence entre les équations discrètes de Lyapunov associées au système original et à son adjoint. Ensuite, avec la formulation étendue, nous formulons une condition nécessaire et suffisante de stabilité, qui se vérifie justement par l'équation de Lyapunov discrète associée au système adjoint.

Puis, nous établissons une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique pour des systèmes discrets incertains. La définition de stabilisabilité quadratique est analogue à celle des systèmes continus. Cette condition, formulée de manière presque identique à celle du cas continu, est basée sur l'existence d'une matrice semi-définie positive. Une fois trouvée cette matrice, un gain linéaire robuste est immédiatement déterminé par la même expression que celle du cas continu. Malgré toutes les similitudes avec le cas continu, le parallèle avec l'équation de Riccati discrète n'est pas évident à faire.

Toutes les caractéristiques de convexité et convergence sont conservées, et la méthode de plans de coupe peut facilement accomplir la stabilisation quadratique pour les systèmes discrets incertains. Une augmentation de la complexité de l'algorithme, si l'on veut travailler avec des conditions nécessaires et suffisantes, est requise. La norme du gain obtenu reste bornée par une des variables à minimiser.

Les contributions concernant la commande robuste de systèmes discrets ne sont pas nombreuses dans la littérature, et aucune ne prend en compte le cas de contraintes de structure. Nous avons donc fourni des outils assez performants capables de résoudre des problèmes qui jusqu'à présent étaient sans solution.

# Chapitre 4

## Exemples Numériques

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques exemples sélectionnés pour illustrer les contributions de notre travail dans le domaine de la commande robuste des systèmes linéaires incertains, ainsi que pour mettre en évidence les performances de nos procédures numériques.

Des comparaisons sont faites avec d'autres approches et nous verrons que l'approche préconisée se situe dans un bon rang parmi les méthodes effectives déjà existantes.

Pour les systèmes continus incertains, la méthode est plus générale que celles parues dans la littérature, car elle permet de prendre en compte des contraintes de structure (décentralisation) et aussi de minimiser l'effort de commande (norme du gain  $K$  de retour d'état) et ce, de manière relativement simple.

L'extension aux systèmes discrets est, à notre connaissance, une des toutes premières contributions, et ne présente pas de difficulté majeure par rapport au cas continu. Remarquons que notre approche fournit en fait sensiblement les mêmes conditions pour le cas continu et le cas discret.

Nous présentons les algorithmes et procédures numériques développées au long de ce travail. Bien sûr, à l'heure actuelle il est surtout intéressant d'utiliser la méthode pour les systèmes décrits par une dynamique étendue, qui présente les meilleurs résultats. Toutefois, pour la clarté et la cohérence de l'ensemble il nous a paru utile de conserver, chronologiquement, les divers algorithmes qui ont été développés afin de pouvoir "apprécier" les raffinements successifs apportés durant notre travail.

Nous commençons d'abord quelques exemples pour des systèmes où uniquement la matrice dynamique  $A$  est incertaine. Ensuite, nous passons aux systèmes avec  $A$

et  $B$  incertains, introduisant aussi des exemples sur la commande décentralisée. Puis, pour les systèmes décrits par une dynamique augmentée. Avec cette représentation la commande robuste pour les systèmes discrets devient réalisable, de manière totalement similaire, permettant aussi l'incorporation de contraintes de décentralisation.

## 4.2 Systèmes Continus — Matrice $A$ Incertaine

### 4.2.1 Exemple Académique

Tout d'abord, nous allons traiter un système académique, construit comme suit. Considérons le système  $(\bar{S})$  donné par :

$$(\bar{S}) \quad \dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}u \quad (4.1)$$

avec

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 + q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 + q_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La transformation de similarité  $A = T^{-1}\bar{A}T$ ,  $B = T^{-1}\bar{B}$  avec  $T$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

définit le système (S)

$$(S) \quad \dot{x} = Ax + Bu \quad (4.2)$$

Ce système possède un mode fixe en  $(-1 + q_1)$  et deux autres commandables pour  $q_2 \neq -3$ . Alors, il est facile de voir qu'il n'existe pas de loi de commande qui stabilise (S) si  $q_1 > 1$  et/ou  $q_2 = -3$ . Effectivement, les algorithmes appliqués à ces cas-là ont abouti à cette même conclusion, donnant la réponse *solution inexistante*.

Ensuite, le problème a été résolu pour des valeurs des paramètres incertains  $q_1$  et  $q_2$  donnés par

$$-0.9 \leq q_1 \leq 0.9, \quad -2 \leq q_2 \leq 2$$

Les divers algorithmes discutés au chapitre 2 ont été utilisés. Nous dénombrons les cas traités:

1. Recherche de  $W \geq I$  sous  $B'x = 0$  (algorithme 2.3). Comme nous l'avons précisé, il s'agit ici plutôt d'une vérification de la stabilisabilité quadratique que d'une véritable synthèse d'une commande robuste (néanmoins, celle-ci est déterminée, à partir d'une matrice  $S$ ). La matrice  $W$  trouvée est donnée par

$$W = \begin{bmatrix} 1.09 & -0.64 & -0.50 \\ -0.64 & 36.00 & 26.50 \\ -0.50 & 26.50 & 21.05 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

après 21 itérations. A partir de  $W$ , un gain  $K$  peut être déterminé

- (a)  $K = \mu B'W^{-1}$ , avec  $\mu$  à déterminer (voir procédure 2.2)

$$K = \begin{bmatrix} 19.6 & -89.94 & 157.47 \end{bmatrix}$$

$$\|K\| = 182.40$$

- (b) Avec  $W$  donné par (4.3), on recherche une matrice  $R$  satisfaisant  $AW + WA' < BR + R'B'$ . On obtient, après 18 itérations:

$$R = \begin{bmatrix} 3.33 & 173.01 & 173.01 \end{bmatrix}$$

ce qui donne le gain  $K = RW^{-1}$

$$K = \begin{bmatrix} 6.78 & -16.86 & 29.60 \end{bmatrix}$$

$\|K\| = 34.73$ . Bien sûr, on note ici un gain nettement "plus petit" qu'auparavant. Ceci est dû au fait que, dans la procédure de recherche de  $R$ , on fait intervenir comme variable à minimiser  $\delta$  qui est une borne supérieure des éléments  $r_{qp}$ .

2. Recherche de  $W$  et  $R$  (procédure numérique 2.4). Avec 31 itérations on

obtient

$$W = \begin{bmatrix} 40.10 & -33.30 & -37.24 \\ -33.30 & 64.09 & 54.86 \\ -37.24 & 54.86 & 51.88 \end{bmatrix}$$

$$R = [ 39.89 \quad 76.09 \quad 83.59 ]$$

ce qui donne le gain  $K$

$$K = [ 15.38 \quad -17.42 \quad 31.08 ]$$

avec  $\| K \| = 38.80$ . La valeur de la norme est légèrement plus grande que celle du cas antérieur. Ceci se comprend car dans la recherche conjointe de  $W$  et  $R$ , le critère à minimiser est  $J = \delta + \sigma$ ,  $\sigma$  étant une borne supérieure des éléments diagonaux de  $W$ , et alors l'effort n'est pas concentré sur la minimisation des éléments  $r_{qp}$  comme avant. Toutefois, uniquement cette dernière procédure permet de prendre en compte les incertitudes sur la matrice  $B$ .

#### 4.2.2 Problème de Commande d'un Satellite

Ce problème a été abordé dans [12] et [25], où une commande par retour de sortie est proposée. Le modèle mathématique du satellite peut être identifié à celui de deux masses liées par un ressort avec couple de torsion constant  $k$  et amortissement constant  $d$ . Les équations dynamiques donnent

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + d(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k(\theta_1 - \theta_2) = T_c \quad (4.4)$$

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + d(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (4.5)$$

où  $T_c$  est la commande et  $J_1$  et  $J_2$  sont les moments d'inertie. Le vecteur des variables d'état choisi est

$$x = [ \theta_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \theta_1 \quad \dot{\theta}_1 ]'$$

L'équation d'état, avec  $u = T_c$  et  $J_1 = J_2 = 1$  est donnée par

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & -d & k & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & d & -k & -d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.6)$$

Les paramètres incertains  $k$  et  $d$  sont tels que

$$\frac{0.09}{\epsilon} \leq k \leq 0.4\epsilon$$

$$0.04\sqrt{\frac{k}{10}} \leq d \leq 0.2\sqrt{\frac{k}{10}}$$

Dans [12], pour  $\epsilon = 1$  un retour de sortie stabilisant est calculé. Nous posons un problème un peu modifié. Nous voulons étaler la plage de variations paramétriques tout en étant capables de trouver une solution  $W$  et une matrice  $K$  de retour d'état stabilisant. Dans [18], ce problème a été présenté et résolu uniquement avec la procédure 2.3 (la seule dont on disposait à l'époque), pour  $\epsilon = 3$ , et les résultats, après 48 itérations, sont

$$W = \begin{bmatrix} 818.72 & -46.49 & 822.77 & -92.52 \\ -46.49 & 7.19 & -62.63 & 5.11 \\ 822.77 & -62.63 & 920.28 & -270.86 \\ -92.52 & 5.11 & -270.86 & 920.28 \end{bmatrix}$$

et le gain  $K$ , ( $K = \mu B'W^{-1}$ ) donne

$$K = \begin{bmatrix} -956.10 & 4282.90 & 1222.53 & 259.12 \end{bmatrix}$$

avec  $\|K\| = 4562.79$ . Il a donc été possible de stabiliser quadratiquement le système pour des variations paramétriques importantes. Les valeurs obtenues pour le gain  $K$  sont considérablement élevées, de sorte que la procédure doit être plutôt considérée comme un test de stabilité quadratique que comme un outil de synthèse de commande. Ce problème a été en partie traité par les procédures de recherche conjointe de  $W$  et  $R$  et finalement résolu avec la formulation dynamique étendue. Si on applique à cet exemple la procédure associée à une représentation étendue

du système, on obtient (après 174 itérations)

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1273.12 & -39.9681 & 1268.71 & -30.2533 \\ -39.9681 & 5.65512 & -46.9504 & 3.97288 \\ 1268.71 & -46.9504 & 1292.6 & -69.1508 \\ -30.2553 & 3.97288 & -69.1508 & 102.826 \end{bmatrix}$$

$$W_2' = [ 33.1355 \quad -2.73857 \quad 15.3244 \quad 146.693 ]$$

et le gain  $K = W_2' W_1^{-1}$

$$K = [ -5.55939 \quad 6.76011 \quad 5.90122 \quad 3.49833 ]$$

avec  $\| K \| = 11.12064$ , ce qui permet de tester l'efficacité de l'algorithme 2.5 pour l'obtention de "petites" normes.

## 4.3 Systèmes Continus — $A$ et $B$ Incertains

### 4.3.1 Exemple Académique

Nous allons analyser brièvement ce qui se passe quand on ajoute un paramètre incertain au système décrit par (4.1). La matrice d'entrée est donnée par

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La même transformation de similarité décrite auparavant est appliquée; les variations considérées sur  $q_3$  sont

$$0.8 \leq q_3 \leq 1.2$$

et les résultats donnent, après 45 itérations

$$W = \begin{bmatrix} 20.00 & -18.40 & -19.47 \\ -18.40 & 83.41 & 60.40 \\ -19.47 & 60.40 & 47.67 \end{bmatrix} \quad R = [ 8.98 \quad 233.18 \quad 230.71 ]$$

$$K = [ 24.86 \quad -31.27 \quad 54.62 ]$$

Comme les chiffres le montrent, une variation dans les éléments de  $B$  exige une augmentation des valeurs du gain  $K$  assez importante ( $\|K\| = 67.67$ ). Ce cas sera repris dans la section consacrée à l'analyse à partir du système augmenté.

### 4.3.2 Commande Robuste d'un Hélicoptère

Cet exemple, emprunté à [47], a déjà été présenté par nous dans [36]. Il s'agit d'une représentation simplifiée de la dynamique d'un hélicoptère dans un plan vertical. Le système est représenté par la paire  $(A, B)$ , soit

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & a_{32} & -0.707 & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1761 \\ b_{21} & -7.5922 \\ -5.52 & 4.99 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où les paramètres  $a_{32}$ ,  $a_{34}$  et  $b_{21}$  sont incertains. Ces valeurs sont

$$a_{32} = 0.2855 \pm 0.2192$$

$$a_{34} = 1.3229 \pm 1.2031$$

$$b_{21} = 3.0447 \pm 2.0673$$

ce qui représente des variations de vitesse entre 60 et 170 nœuds. Notre méthode donne, après 47 itérations

$$W = \begin{bmatrix} 2.2417 & 1.2354 & 0.4194 & 0.3354 \\ 1.2354 & 2.2417 & 0.5283 & 0.2552 \\ 0.4194 & 0.5283 & 2.2417 & -0.6722 \\ 0.3354 & 0.2552 & -0.6722 & 1.6416 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.1381 & 0.0179 & -0.8202 & -0.1508 \\ 0.7099 & -0.8202 & 0.2909 & 0.8202 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.1689 & 0.0779 & -0.5213 & -0.3519 \\ 0.6237 & -0.8885 & 0.4281 & 0.6856 \end{bmatrix}$$

avec  $\| K \| = 1.3972$ . Le gain calculé dans [47] donne  $\| K \| = 2.5854$ , presque deux fois plus.

Parlons un peu de temps de calcul: nos algorithmes ont été programmés sur des station de travail SUN-3, avec le logiciel PRO-Matlab. Pour cet exemple, les résultats ont été obtenus au bout de 210 secondes environ.

Dans [47], une méthode de stabilisation quadratique est proposée. Il s'agit d'une condition suffisante obtenue à partir de la résolution répétitive d'une équation type Riccati; cette approche est basée sur des hypothèses de décomposition de l'incertitude en matrices de rang 1, ce qui peut s'avérer très complexe du point de vue de la résolution numérique pour un cas avec plusieurs paramètres incertains.

Par exemple, si l'on considère aussi  $a_{23}$  et  $b_{32}$  comme étant incertains, donnés par

$$-0.0076 \leq a_{23} \leq 0.124$$

$$2.49 \leq b_{32} \leq 7.49$$

il n'est point évident de trouver une décomposition en matrices de rang 1 pour laquelle l'algorithme discuté dans [47] "marche"; nos procédures (qui travaillent avec des conditions nécessaires et suffisantes) donnent au bout de 48 itérations ( $\approx 255$  secondes):

$$W = \begin{bmatrix} 2.9972 & 1.4892 & -0.1107 & 0.7569 \\ 1.4892 & 2.9972 & 1.2578 & -0.0192 \\ -0.1107 & 1.2578 & 2.9972 & -0.9176 \\ 0.7569 & -0.0192 & -0.9176 & 1.6682 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.1874 & -1.1171 & -1.1884 & -0.7906 \\ 0.4931 & -1.1884 & 0.1681 & 0.2166 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.4979 & -0.4145 & -0.5049 & -0.9822 \\ 0.6005 & -0.9007 & 0.4923 & 0.1178 \end{bmatrix}$$

Nous allons profiter de cet exemple pour discuter du comportement de l'algorithme, notamment l'évolution des valeurs propres de  $W$  et  $H_{i,j}(W)$ , illustrant un peu la méthode de plans de coupe.

La figure 4.1 illustre 3 itérations hypothétiques de l'algorithme. L'ensemble des solutions admissibles, complètement inconnu au départ, est représenté par la région grisée.

- *Première Itération:* A partir de  $W_1$  (une matrice initiale quelconque), qui n'appartient pas à l'ensemble désiré, on génère un hyperplan séparateur  $h_1$ . Le problème simplexe à résoudre dans l'itération suivante admet comme solutions uniquement celles qui sont en-dessous de (ou sur) l'hyperplan  $h_1$ .
- *Deuxième Itération:* Supposons que la solution du problème linéaire à l'étape 2 de l'algorithme 2.4 soit donnée par  $W_2$ . Volontairement nous ne la mettons pas sur  $h_1$  pour la clarté de la figure, bien qu'en général les solutions du problème linéaire soient collées aux contraintes. Cette solution n'étant pas dans la région grisée, on crée alors un deuxième hyperplan séparateur  $h_2$ .
- *Troisième Itération:* Les solutions admissibles du problème simplexe sont délimitées par les deux hyperplans  $h_1$  et  $h_2$ . La solution rencontrée étant  $W_3$ , l'hyperplan  $h_3$  vient s'ajouter aux précédents.
- Et ainsi de suite.

Il faut remarquer qu'à chaque itération l'hyperplan  $h_\ell$  ajouté exclut la solution  $W_\ell$  actuelle de l'ensemble des solutions admissibles pour le problème au prochain pas.

Au début de la procédure itérative, l'ensemble des hyperplans définit encore un domaine ouvert. Cela explique pourquoi certaines valeurs propres sont très élevées.

La figure 4.2 montre justement l'évolution des valeurs propres au fur et à mesure des itérations. Nous présentons  $\lambda_{\min}(W_\ell)$  et  $\lambda_{\max}(H_{i,j}(W_\ell, R_\ell))$ . On observe que  $\lambda_{\min}(W)$  converge vers 1 et  $\lambda_{\max}(H_{i,j}(W, R))$  converge vers  $-0.1$ . Ces valeurs sont fixées par les coupes effectuées par l'algorithme 2.4 (voir les paramètres arbitraires  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_3$ ). Les 12 premières itérations sont présentées séparément, car les valeurs propres atteignent des valeurs importantes.

Il est intéressant de faire un parallèle entre les figures 4.1 et 4.2. Aux premières itérations, l'ensemble des solutions admissibles du problème de programmation

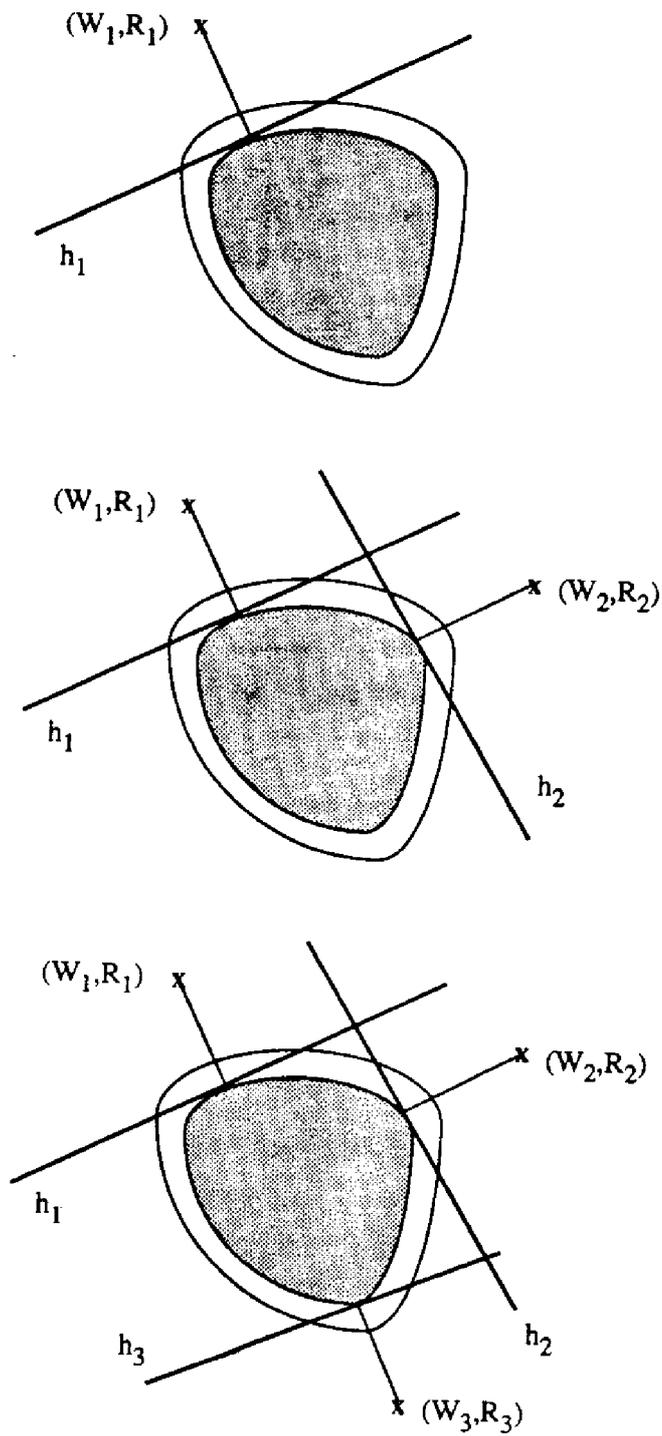


Figure 4.1 : algorithme de plans de coupe

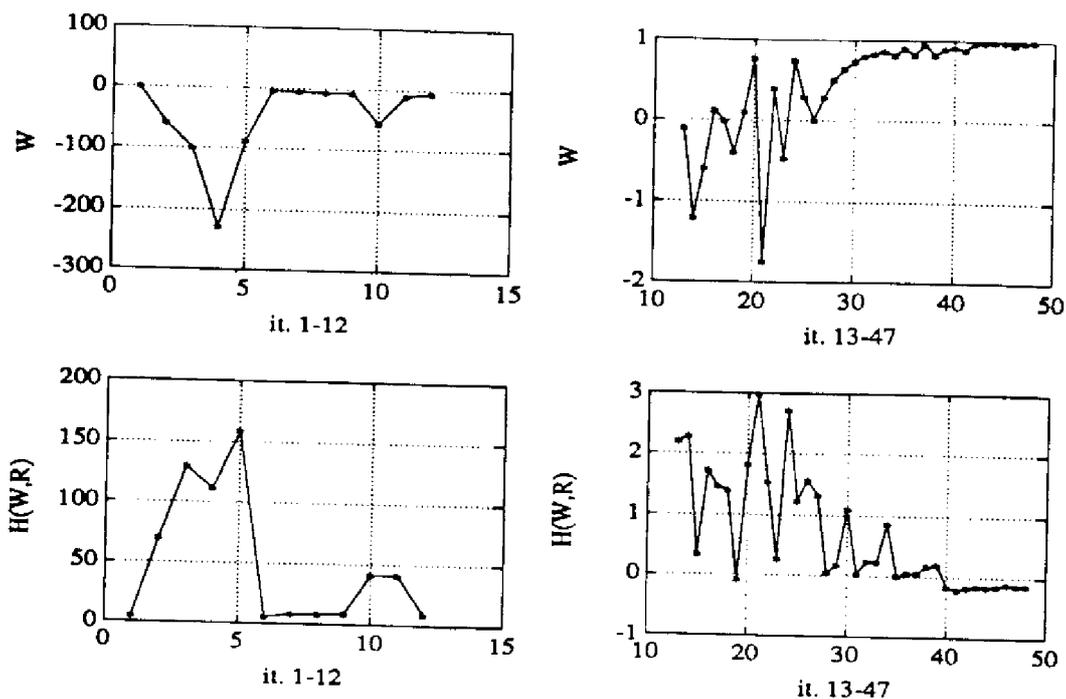


Figure 4.2 : évolution de  $\lambda_{\min}(W)$  et  $\lambda_{\max}(H_{i,j}(W, R))$

linéaire n'est même pas fermé, donc les valeurs propres peuvent prendre de très grandes valeurs. Ensuite, le problème linéaire commence à avoir pour solutions admissibles un ensemble polyédrique fermé, jusqu'à entourer finalement l'ensemble des solutions du problème.

S'il n'existe pas de matrices  $W$  et  $R$  satisfaisant les conditions du problème, alors les hyperplans rendront infaisable, au bout d'un nombre fini d'itérations, le problème linéaire de l'étape 2 de l'algorithme 2.4.

### 4.3.3 Avion de Chasse

Le troisième exemple de cette section est aussi emprunté à [47] et a été présenté dans [36]. Il s'agit de la stabilisation du mode longitudinal d'un avion de chasse F4E en deux points de fonctionnement. Le système est décrit par

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

et les points de fonctionnement par les paires  $(A_1, B_1)$  et  $(A_2, B_2)$  données par

$$A_1 = A_0 + \Delta A \quad B_1 = B_0 + \Delta B$$

$$A_2 = A_0 - \Delta A \quad B_2 = B_0 - \Delta B$$

Les données sont

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.8251 & 17.76 & 90.245 \\ 0.1734 & -0.7549 & -11.1 \\ 0 & 0 & -250 \end{bmatrix}, \quad \Delta A = \begin{bmatrix} -0.1645 & -0.35 & 5.905 \\ 0.0914 & -0.0963 & -0.29 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -91.44 \\ 0 \\ 250 \end{bmatrix}, \quad \Delta B = \begin{bmatrix} -6.34 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans [47], ce problème est résolu avec la même technique que celle employée pour le problème de l'hélicoptère. Nos procédures fournissent, après 27 itérations ( $\approx 58$  secondes):

$$W = \begin{bmatrix} 5.1033 & -1.5541 & 0.2363 \\ -1.5541 & 1.6132 & 0.2489 \\ 0.2363 & 0.2489 & 5.1033 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -0.888 & -0.888 & -0.888 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.4697 & -0.9869 & -0.1041 \end{bmatrix}$$

avec  $\| K \| = 1.0979$ . Notre gain stabilisant possède une norme plus petite que celle du gain calculé dans [47] (égal à 2.0882), et notre méthode n'a guère exigée de grand effort de calcul.

#### 4.3.4 Dépendance Entre Paramètres

Cet exemple a été discuté dans [18] et illustre l'importance de pouvoir manipuler des paramètres incertains dépendants. Le problème, emprunté à [48], est décrit par la paire  $(A, B)$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -(1 - \beta_1) \\ \beta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_3 \\ 1 - \beta_4 \end{bmatrix}$$

Ce problème présente donc 4 paramètres incertains, ce qui fait 16 paires  $(A_i, B_j)$  à traiter par l'algorithme. Par exemple, pour des variations de  $\beta_i, i = 1 \dots 4$  données par

$$0.1 \leq \beta_i \leq 1.0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

il n'existe pas de solution. Pour une plage de variations

$$0.2 \leq \beta_i \leq 0.75 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

la solution obtenue est (8 itérations)

$$W = \begin{bmatrix} 19.98 & 0.49 \\ 0.49 & 1.00 \end{bmatrix} \quad R = [ 17.27 \quad 17.92 ]$$

$$K = [ 0.43 \quad 17.71 ]$$

Dans [48], il est montré que, pour  $\beta$  unique compris dans l'intervale  $[0.1, 1]$  et affectant les éléments  $a_{12}, a_{21}, b_1$  et  $b_2$ , il existe une matrice de Lyapunov unique qui garantit la stabilité du système en boucle fermée. Avec cette information, il est évident que seules les paires  $[A(0.1), B(0.1)]$  et  $[A(1), B(1)]$  doivent être considérées. Pour les bornes de variation

$$0.1 \leq \beta \leq 1.0$$

une solution existe et est obtenue après 5 itérations:

$$W = \begin{bmatrix} 46.79 & -0.23 \\ -0.23 & 1.00 \end{bmatrix} \quad R = [ 8.65 \quad 44.60 ]$$

$$K = [ 0.40 \quad 44.69 ]$$

Ceci montre qu'une analyse qui ne prend pas en compte des relations possibles entre les paramètres inconnus qui affectent les matrices  $A$  et  $B$  risque de s'avérer trop conservatrice, cela explique le nombre de publications où les résultats de Kharitonov sont étendus au cas de paramètres dépendants (voir, par exemple, [46] et [52]).

## 4.4 Commande Décentralisée

Avant de passer aux exemples relatifs à la représentation augmentée et aux systèmes discrets, nous allons montrer comment les algorithmes précédents permettent de traiter le problème de la commande décentralisée en présence de paramètres incertains. Comme il a été montré dans le deuxième chapitre, la flexibilité de l'algorithme 2.3 permet déjà la prise en compte de contraintes sur la structure de la matrice  $W$  recherchée ( $W$  bloc diagonale). Ceci, avec l'hypothèse d'une matrice  $B$  également bloc diagonale, fournit des gains  $K = \mu B'W^{-1}$  bloc diagonaux. Dans cette section nous présentons uniquement des exemples relatifs à l'algorithme 2.4 qui permet aussi la prise en compte des incertitudes dans la matrice  $B$  et n'exige pas qu'elle soit bloc diagonale, le gain robuste étant donné par  $K = RW^{-1}$ .

### 4.4.1 Commande d'un Manipulateur Mécanique

Ce problème a été traité par Zohdy et al [57], où seul le problème de commande robuste est résolu (commande centralisée). Il s'agit d'un manipulateur <sup>1</sup> à deux branches, avec des coefficients de couplage incertains. Nous allons profiter de la symétrie entre les deux branches du manipulateur pour proposer une commande décentralisée robuste.

Le système en question est modélisé par

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} u \quad (4.7)$$

avec les sous-matrices données par

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1/\tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_{11} & -k_{11} & (c_1 - k_{12}) \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -1/\tau_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_{21} & -k_{21} & -k_{22} \end{bmatrix} ; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1/\tau_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup>Cet exemple est aussi traité dans [10]

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}; \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1/\tau_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et les valeurs nominales des paramètres étant:

$$k_{11} = k_{21} = 10 \quad , \quad k_{12} = k_{22} = 2$$

$$\tau_1 = \tau_2 = 0.1 \quad , \quad c_1 = 0.2 \quad , \quad c_2 = c_3 = 0.1$$

Pour ce système nominal, nous avons calculé une commande décentralisée (algorithme 2.4), et les résultats sont, après 44 itérations:

$$W = \begin{bmatrix} 2.30 & 0.62 & -1.30 & 0 & 0 & 0 \\ 0.62 & 1.29 & -0.62 & 0 & 0 & 0 \\ -1.30 & -0.62 & 2.30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.30 & 0.48 & -1.30 \\ 0 & 0 & 0 & 0.48 & 1.18 & -0.48 \\ 0 & 0 & 0 & -1.30 & -0.48 & 2.30 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.79 & -0.79 & 0.79 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.79 & -0.67 & 0.79 \end{bmatrix}$$

Cette structure de  $W$  et  $R$ , imposée par l'algorithme, donne un gain bloc diagonal  $K = RW^{-1}$

$$K = \begin{bmatrix} 0.91 & -0.73 & 0.66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.88 & -0.64 & 0.70 \end{bmatrix}$$

avec  $\|K\| = 1.3404$ . Déjà on peut conclure que pour le système nominal il n'est nul besoin, du point de vue de la stabilité, d'une commande centralisée. Dans [57], le gain centralisé robuste est donné par

$$K_{[57]} = \begin{bmatrix} 5.67 & 114.0 & 14.4 & 0.017 & 0.321 & 0.094 \\ 0.017 & 0.321 & 0.094 & 5.63 & 113.0 & 14.2 \end{bmatrix}, \quad \|K\| = 115.1437$$

Si l'on compare avec le gain obtenu par notre méthode, on note un rapport de 100 entre les normes des deux gains. Bien sûr, on peut en partie expliquer la norme élevée du gain  $K_{[57]}$  par le fait qu'il prend en compte les variations paramétriques

possibles. Les coefficients  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  sont considérés incertains, pouvant atteindre des variations de  $\pm 100\%$  autour de valeurs nominales.

Maintenant, considérons des incertitudes beaucoup plus importantes, données par

$$-1.6 \leq c_1 \leq 2.0 \quad (\pm 900\%)$$

$$-0.7 \leq c_2 \leq 0.9 \quad (\pm 800\%)$$

$$-0.4 \leq c_3 \leq 0.6 \quad (\pm 600\%)$$

De plus, nous ajoutons de l'imprécision sur les paramètres  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , ce qui rend la matrice  $B$  incertaine.

$$0.08 \leq \tau_1 \leq 0.12 \quad , \quad 0.08 \leq \tau_2 \leq 0.12$$

Au bout de 63 itérations, on obtient:

$$W = \begin{bmatrix} 3.21 & 0.86 & -2.21 & 0 & 0 & 0 \\ 0.86 & 1.33 & -0.86 & 0 & 0 & 0 \\ -2.21 & -0.86 & 3.21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.21 & 0.76 & -2.21 \\ 0 & 0 & 0 & 0.76 & 1.26 & -0.75 \\ 0 & 0 & 0 & -2.21 & -0.75 & 3.21 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.23 & -1.23 & 1.23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.23 & -1.23 & 1.23 \end{bmatrix}$$

et le gain  $K$  décentralisée

$$K = RW^{-1} \begin{bmatrix} 1.42 & -1.17 & 1.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.40 & -1.18 & 1.07 \end{bmatrix}$$

Si l'on calcule la norme du gain décentralisé robuste, on obtient  $\|K\| = 2.1207$ .

La figure 4.3 représente une simulation du système aux valeurs nominales pour la commande décentralisée. Seules les variables d'état relatives au premier sous-

système ont été tracées. Les conditions initiales sont

$$x_0 = [ 0.3 \ 0.2 \ 0.0 \ 0.7 \ 0.2 \ 0.0 ]'$$

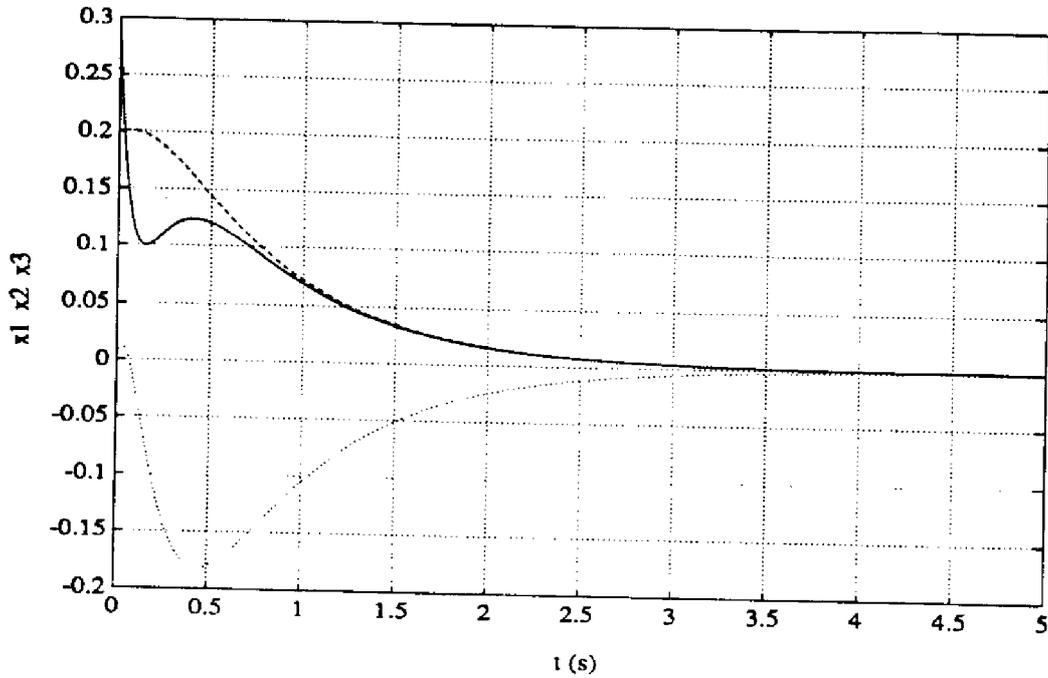


Figure 4.3 : système nominal — commande décentralisée

La figure suivante 4.4 montre l'évolution des états  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  pour les paramètres incertains qui suivent les lois de variation dans le temps suivantes:

$$\tau_1 = 0.1 + 0.02 \sin(10t)$$

$$\tau_2 = 0.1 + 0.02 \cos(4t)$$

$$c_1 = 0.2 + 1.8 \sin(20t)$$

$$c_2 = 0.1 + 0.8 \cos(15t)$$

$$c_3 = 0.1 + 0.5 \sin(5t)$$

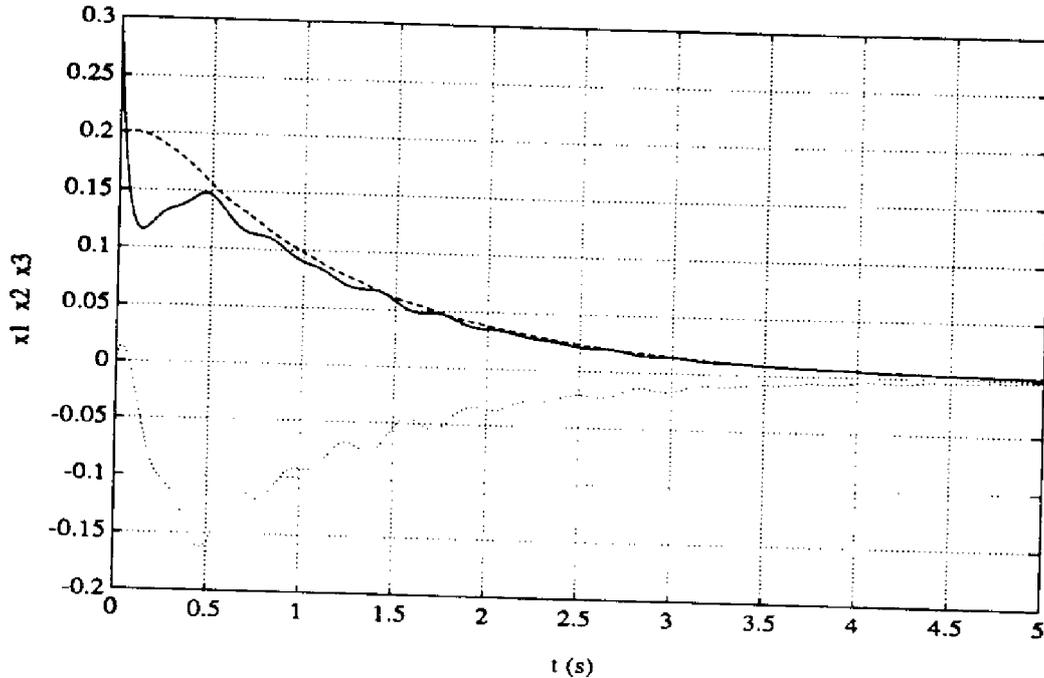


Figure 4.4 : système incertain — commande décentralisée robuste

Notre algorithme fournit donc une commande décentralisée et robuste. En regardant la simulation, on peut noter l'influence des variations paramétriques (oscillations autour des trajectoires), mais le comportement global ne diffère presque pas de celui du système nominal.

On reprendra ce même problème par la suite, lors de l'analyse des méthodes appliquées aux systèmes décrits par une dynamique étendue.

En ce qui concerne la commande décentralisée, nous pouvons conclure que cette contrainte peut être facilement incorporée au niveau des méthodes sans surcroît de tâche de calcul. Grâce à notre formulation, nous croyons qu'il s'agit ici d'une des rares méthodes pour laquelle imposer la contrainte décentralisation revient à simplifier le problème à résoudre (quelques éléments de  $W$  et  $R$ , variables du problème, sont fixés à zéro et n'interviennent pas dans l'algorithme de plans-de-coupe). Bien sûr, la condition est uniquement suffisante pour l'existence d'une commande décentralisée, mais il faut remarquer que dans la littérature la plupart des conditions sont également suffisantes.

## 4.5 Formulation de Dynamique Etendue

Dans cette section on considère des systèmes continus et des systèmes discrets incertains, décrits par une formulation dynamique dite augmentée (voir chapitre 2, section 2.5 et aussi chapitre 3). Nous allons montrer que l'on peut également traiter les contraintes de décentralisation, tout en améliorant les résultats au niveau de la norme du gain robuste  $K$  obtenu.

### 4.5.1 Systèmes Continus — $A$ et $B$ incertains

Nous reprendrons l'exemple de la sous-section 4.3.1. Les variations considérées étant les mêmes, on obtient au bout de 78 itérations:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 7.1830 & -6.9761 & -7.1603 \\ -6.9761 & 75.5377 & 52.7904 \\ -7.1603 & 52.7904 & 39.7506 \end{bmatrix}$$

$$W'_2 = [ 1.7929 \quad 290.951 \quad 282.8 ]$$

ce qui donne le gain

$$K = [ 19.571 \quad -24.714 \quad 43.4609 ]$$

et sa norme  $\| K \| = 53.6904$ . Avec l'algorithme de recherche conjointe de  $W$  et  $R$ , sa valeur était 67.67. Ici, la minimisation d'une borne majorante pour la norme du gain  $K$  est explicitée dans la procédure d'optimisation, ce qui donne des résultats tout à fait satisfaisants.

### 4.5.2 Stabilisation de Quatre Points de Fonctionnement

Cet exemple est emprunté à Petersen [38]. Il propose dans son article une méthode de stabilisation d'un nombre fini de points de fonctionnement d'un système linéaire mono-entrée par une commande non linéaire, basée sur des fonctions quadratiques de Lyapunov associées aux points de fonctionnement. Nous reprenons ici l'exemple (traité aussi dans [19]).

Point de Fonctionnement	1	2	3	4
$a_{11}$	-0.9896	-0.6607	-1.702	-0.5162
$a_{12}$	17.41	18.11	50.72	29.96
$a_{13}$	96.15	84.34	263.5	178.9
$a_{21}$	0.2648	0.08201	0.2201	-0.6896
$a_{22}$	-0.8512	-0.6587	-1.418	-1.225
$a_{23}$	-11.39	-10.81	-31.99	-30.38
$b_1$	-97.78	-272.2	-85.09	-175.6

Tableau 4.1 : points de fonctionnement — système continu

Il s'agit d'un système d'ordre 3 donné par

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix} u$$

dont on connaît 4 points de fonctionnement. Les données sont dans le tableau 4.1. La loi de commande déterminée est déduite de 4 fonctions quadratiques de Lyapunov, chacune associée à un des points de fonctionnement.

Nous proposons, en utilisant notre méthode, une commande linéaire unique qui stabilise tous les points de fonctionnement, basée sur une fonction quadratique de Lyapunov unique. En plus, nous garantissons la stabilité pour toutes les combinaisons linéaires convexes possibles entre les points de fonctionnement.

Notre algorithme obtient une solution, après 82 itérations. Les matrices sont

$$W_1 = \begin{bmatrix} 171.5583 & -15.9527 & -5.1070 \\ -15.9527 & 2.5890 & 0.6497 \\ -5.1070 & 0.6497 & 1.5261 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1.4005 \\ -0.7400 \\ 0.0444 \end{bmatrix}$$

et le gain  $K = W_2' W_1^{-1}$

$$K = \begin{bmatrix} -0.0411 & -0.5729 & 0.1355 \end{bmatrix}$$

Pour illustrer ces résultats, nous présentons sur la figure 4.5 les lieux des racines

de toutes les combinaisons convexes deux-par-deux des points de fonctionnement. C'est-à-dire, en boucle ouverte nous considérons les pôles de  $A_{b_0}$

$$A_{b_0} = \mu A_i + (1 - \mu) A_j \quad i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4, \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

et en boucle fermée ceux de  $A_{b_f}$

$$A_{b_f} = \mu(A_i - B_i K) + (1 - \mu)(A_j - B_j K) \quad i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4, \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

Ensuite, nous ajoutons au problème plus d'incertitude, c'est-à-dire, nous considérons que chacun des points de fonctionnement peut s'écarter de sa valeur nominale de  $\pm 20\%$ , ce qui donne

$$(A, B)_i = (A, B)_i \pm 0.20(A, B)_i \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Notre méthode aboutit toujours à une commande robuste linéaire unique (91 itérations):

$$W_1 = \begin{bmatrix} 200.4880 & -19.4369 & -7.4533 \\ -19.4369 & 3.0164 & 0.9542 \\ -7.4533 & 0.9542 & 1.8374 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.6578 \\ -0.7600 \\ 0.3097 \end{bmatrix}$$

et le gain est

$$K = \begin{bmatrix} -0.0509 & -0.6794 & 0.3150 \end{bmatrix}$$

Nous avons fait la simulation des 4 points de fonctionnement incertains, pour des conditions initiales

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

le système étant commandé par le même gain  $K$  et variant autour des valeurs

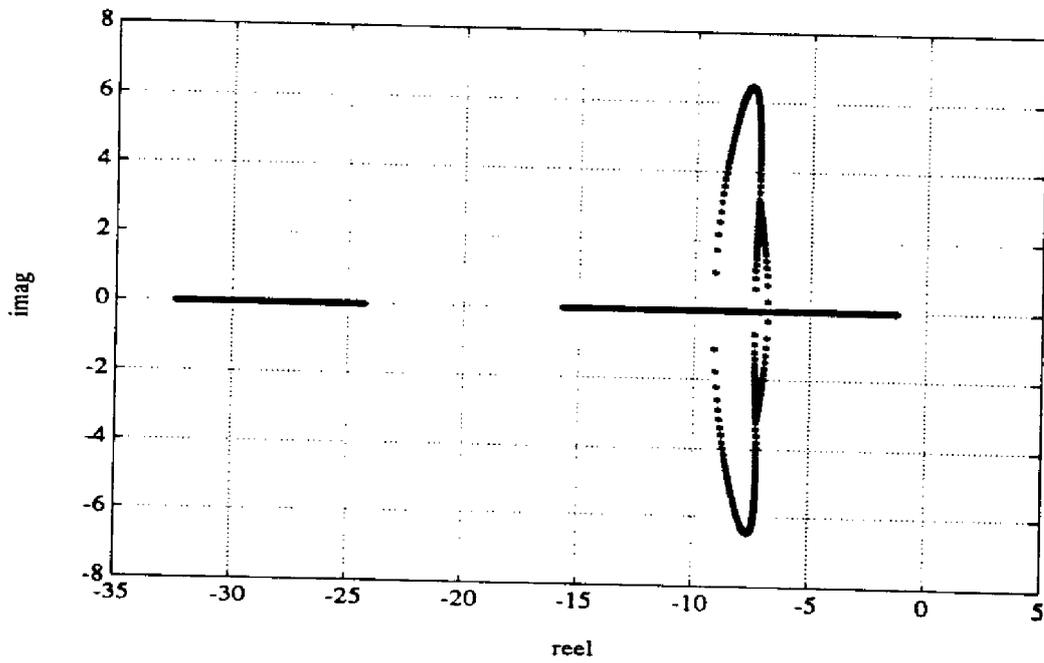
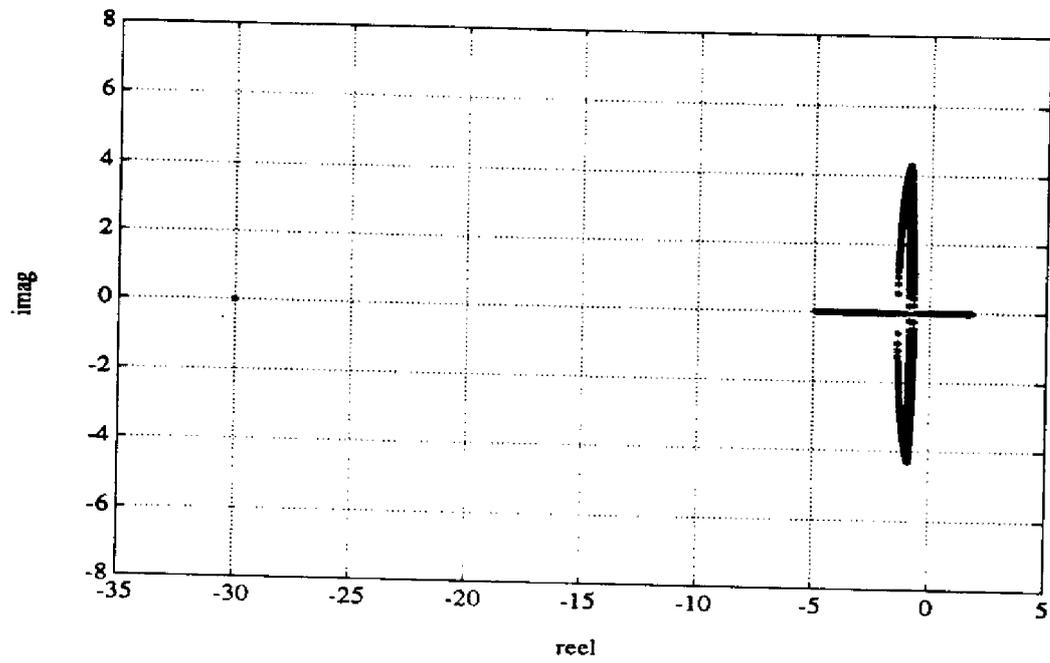


Figure 4.5 : lieux des racines continus — quatre points de fonctionnement

nominales de  $\pm 20\%$ , comme suit:

$$(PF)_i = (PF)_i + 0.20(PF)_i \cos(0.05t) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Les résultats apparaissent sur les figures 4.6 et 4.7, où nous avons représenté, pour chacune des variables d'état, l'évolution des 4 points de fonctionnement perturbés. Notre commande garantit des performances tout à fait acceptables, si l'on compare avec celles fournies par la méthode décrite dans [38].

### 4.5.3 Commande Décentralisée

Nous reprenons ici l'exemple de la sous-section 4.4, pour le traiter avec la représentation dynamique étendue. Les discussions qui suivent sont aussi exposées dans l'article [19].

L'algorithme associé au problème en sa formulation étendue a été mis en œuvre, avec la contrainte de décentralisation, et les matrices résultantes sont (68 itérations)

$$W_1 = \begin{bmatrix} 3.2437 & 0.8842 & -1.0682 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8842 & 1.4231 & -0.7962 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0682 & -0.7962 & 3.2437 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.2437 & 0.8854 & -1.2115 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8854 & 1.4657 & -0.9280 \\ 0 & 0 & 0 & -1.2115 & -0.9280 & 3.2437 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} -0.8240 & 0 \\ -0.5724 & 0 \\ 1.5125 & 0 \\ 0 & -0.7607 \\ 0 & -0.6179 \\ 0 & 1.5161 \end{bmatrix}$$

Le gain décentralisé  $K = W_2'W_1^{-1}$  est

$$K = \begin{bmatrix} -0.0869 & -0.1198 & 0.4083 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0439 & -0.1337 & 0.4127 \end{bmatrix}$$

Il est important de remarquer que par rapport au gain  $K$  que nous avons calculé à partir de  $W$  et  $R$ , celui-ci présente une baisse sensible au niveau de

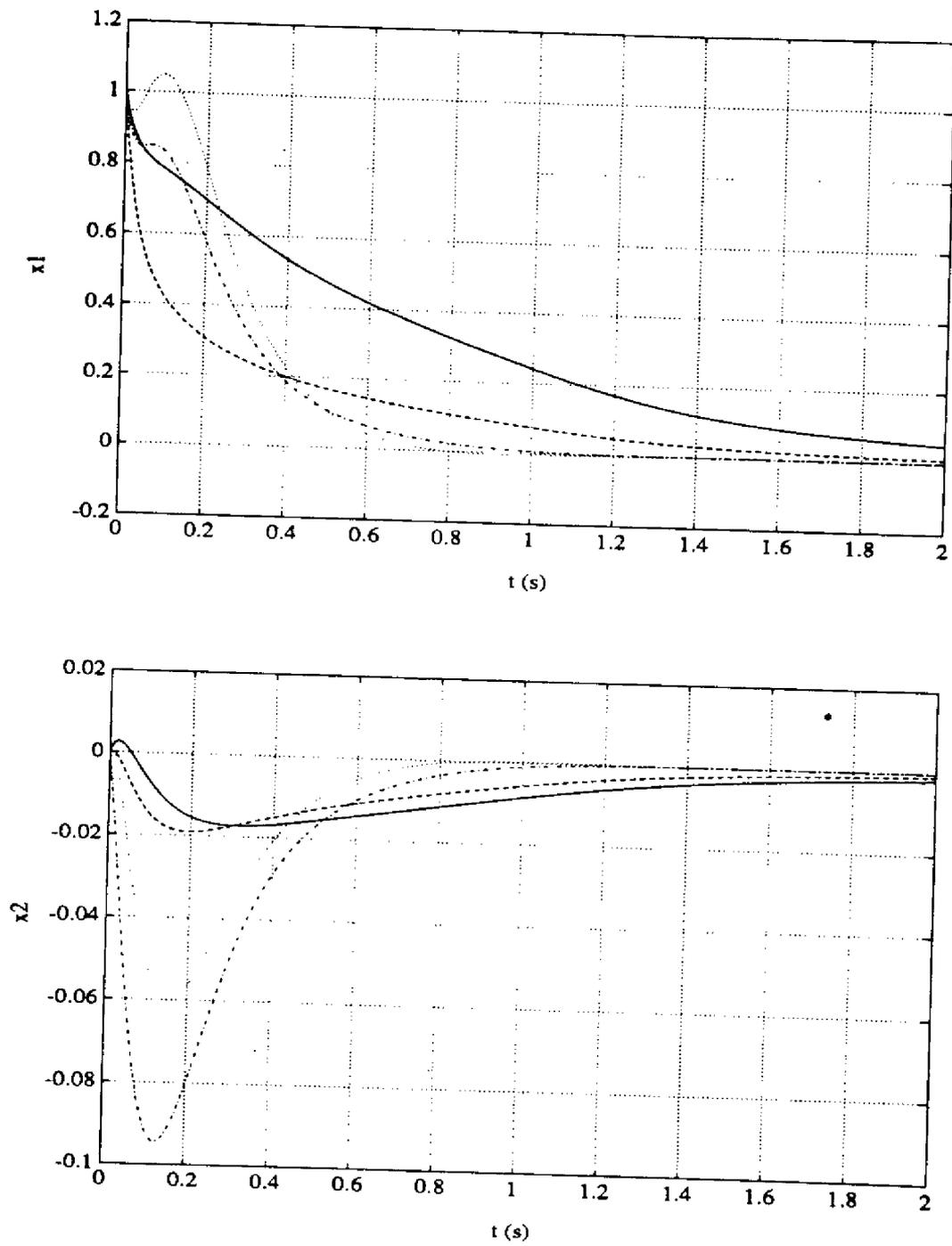


Figure 4.6 : simulation — quatre points de fonctionnement perturbés

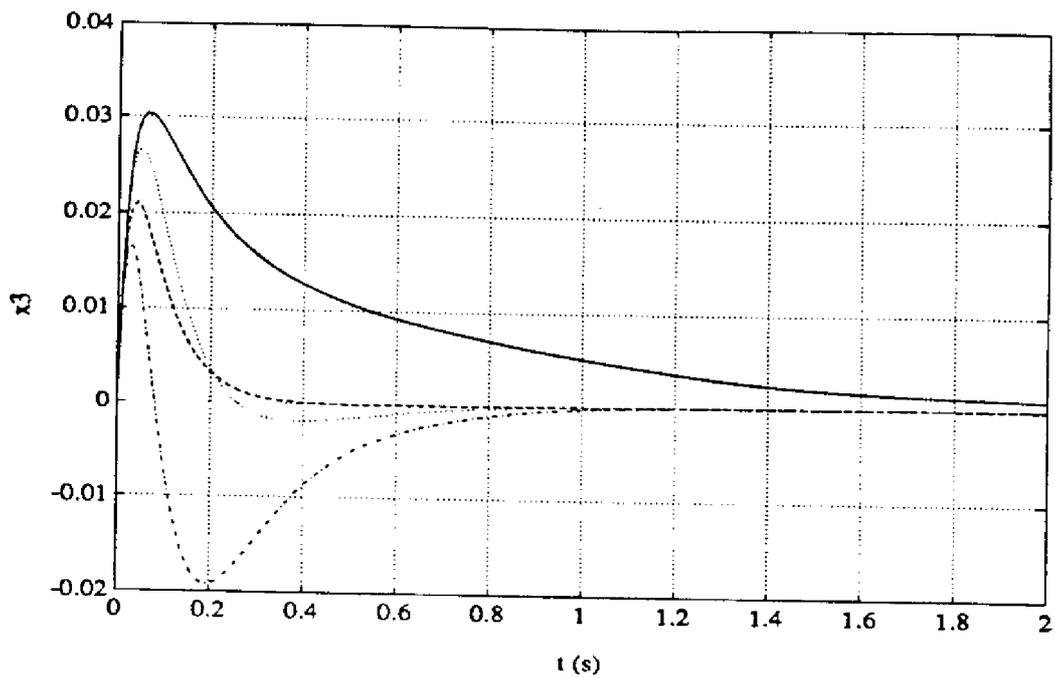


Figure 4.7 : simulation — quatre points de fonctionnement perturbés

sa norme ( $\| K \| = 0.4361$  contre  $\| K \| = 1.3404$  auparavant). La formulation étendue a donc permis cette amélioration.

Ensuite, pour le même système, nous étendons les plages de variations paramétriques. Les paramètres maintenant obéissent aux bornes:

$$0.02 \leq \tau_1 \leq 0.18 \quad , \quad 0.02 \leq \tau_2 \leq 0.18$$

$$-14.8 \leq c_1 \leq 15.2$$

$$-7.9 \leq c_2 \leq 8.1 \quad , \quad -7.9 \leq c_3 \leq 8.1$$

Si l'on utilise le gain centralisé robuste de [57], pour ces variations le système n'est

plus stable. Notre algorithme fournit, après 220 itérations, les matrices

$$W_1 = \begin{bmatrix} 38.4122 & 2.5394 & -14.1750 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5394 & 2.7764 & -0.2563 & 0 & 0 & 0 \\ -14.1750 & -0.2563 & 7.7523 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 38.4122 & 1.9798 & -11.0742 \\ 0 & 0 & 0 & 1.9798 & 2.1106 & -0.1876 \\ 0 & 0 & 0 & -11.0742 & -0.1876 & 6.0045 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 21.2088 & 0 \\ -3.1099 & 0 \\ 19.6773 & 0 \\ 0 & 50.6388 \\ 0 & -1.7758 \\ 0 & 14.5368 \end{bmatrix}$$

ce qui donne le gain décentralisé

$$K = \begin{bmatrix} 5.3936 & -4.9236 & 12.2377 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.6937 & -4.2711 & 10.9442 \end{bmatrix}$$

Sa norme  $\|K\| = 14.2512$  reste nettement au dessous de celle du gain centralisé  $K_{[57]}$  (115.1437), et le gain est pourtant capable de supporter des incertitudes beaucoup plus importantes.

Nous avons simulé le système pour des paramètres variant dans le temps suivant les lois

$$\tau_1 = 0.1 + 0.08 \cos(0.1t)$$

$$\tau_2 = 0.1 + 0.08 \sin(0.5t)$$

$$c_1 = 0.2 + 15.0 \cos(0.1t)$$

$$c_2 = 0.1 - 8.0 \cos(0.2t)$$

$$c_3 = 0.1 - 8.0 \cos(0.1t)$$

La figure 4.8 montre, d'abord, le système incertain avec le gain centralisé robuste donné dans [57] (instable) puis la simulation pour le gain robuste calculé par nos procédures. Le prix à payer pour garantir la stabilité de toutes ces larges variations paramétriques est un transitoire plus grand.

## 4.6 Systèmes Discrets

Cette section présente un exemple de résolution du problème de la commande robuste pour des systèmes linéaires discrets.

Nous reprenons le problème traité par Petersen [38] de stabilisation de 4 points de fonctionnement d'un système linéaire et à partir du système continu nous obtenons un système discret de la manière suivante:

$$x_{k+1} = \tilde{A}_i x_k + \tilde{B}_i u_k \quad i = 1, 2, 3, 4$$

où

$$\tilde{A}_i = \exp [A_i \Delta t]$$

$$\tilde{B}_i = \int_0^{\Delta t} \exp \{A_i(\tau)\} B_i d\tau$$

La période d'échantillonnage a été choisie  $\Delta t = 0.1$  secondes. A partir du tableau 4.1, on obtient le tableau associé au système discrétisé (tableau 4.2):

Notre algorithme pour les systèmes discrets incertains fournit, avec 71 itérations

$$W_1 = \begin{bmatrix} 3620.2200 & -335.2110 & -122.4060 \\ -335.2110 & 50.9528 & 16.8288 \\ -122.4060 & 16.8288 & 23.7720 \end{bmatrix}$$

$$W_2' = \begin{bmatrix} 4.6330 & -6.0835 & 2.7064 \end{bmatrix}$$

et le gain  $K = W_2' W_1^{-1}$

$$K = \begin{bmatrix} -0.0230 & -0.3513 & 0.2441 \end{bmatrix}$$

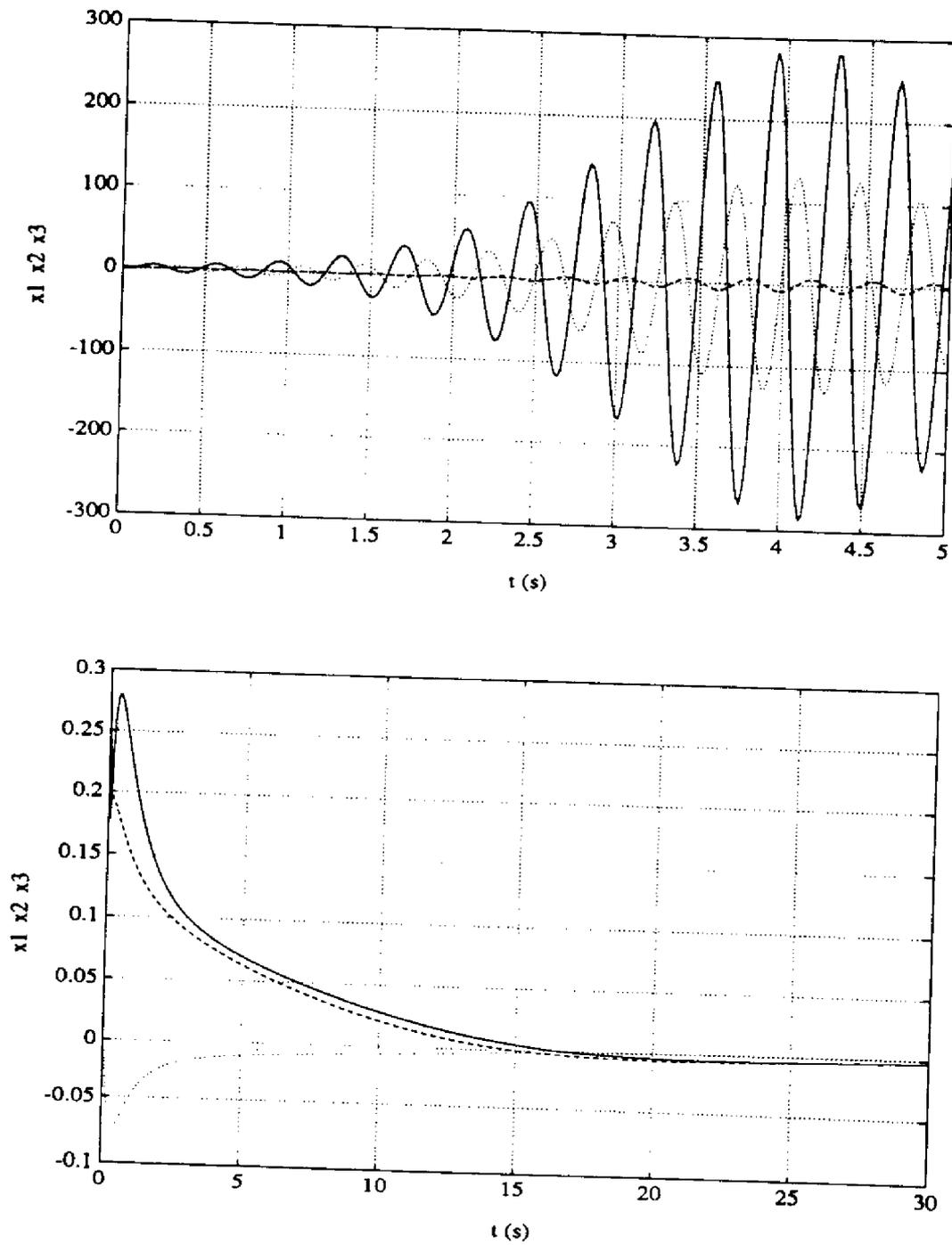


Figure 4.8 : système incertain, gains centralisé et décentralisé

Point de Fonctionnement	1	2	3	4
$\bar{a}_{11}$	0.9268	0.9430	0.8915	0.8648
$\bar{a}_{12}$	1.6002	1.6996	4.4207	2.3959
$\bar{a}_{13}$	2.4524	2.1347	4.3207	3.4747
$\bar{a}_{21}$	0.0243	0.0077	0.0192	-0.0613
$\bar{a}_{22}$	0.9396	0.9432	0.9162	0.8018
$\bar{a}_{23}$	-0.2897	-0.3130	-0.8262	-1.0917
$\bar{a}_{31}$	0	0	0	0
$\bar{a}_{32}$	0	0	0	0
$\bar{a}_{33}$	0.0498	0.0498	0.0498	0.0498
$\bar{b}_1$	-3.5451	-21.2959	4.9973	-6.9694
$\bar{b}_2$	-0.8124	-0.8095	-2.0311	-1.6916
$\bar{b}_3$	0.9502	0.9502	0.9502	0.9502

Tableau 4.2 : points de fonctionnement — système discret

De façon similaire au cas continu, on est capable de stabiliser les quatre points de fonctionnement avec un gain linéaire unique. La figure suivante 4.9 montre les lieux des racines pour toutes les combinaisons linéaires convexes des points de fonctionnement du système pris deux-à-deux, d'abord pour  $K = 0$  (boucle ouverte) et ensuite pour le gain  $K$  calculé par notre méthode.

Nous avons aussi simulé un système discret hypothétique, qui à chaque instant  $k$  correspond à une des 4 configurations possibles, dans l'ordre suivant:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \dots \rightarrow$$

La figure 4.10 montre l'évolution des états de ce système.

## 4.7 Conclusion

Les exemples présentés dans ce chapitre attestent de l'efficacité de nos méthodes, mettant en évidence les capacités particulières des algorithmes pour arriver à des solutions satisfaisantes. Les comparaisons avec d'autres méthodes existantes montrent que notre approche, tout en nécessitant des hypothèses moins restrictives sur l'incertitude prise en compte, fournit des gains robustes stabilisants avec des normes plus petites.

De plus, nous pouvons facilement traiter les systèmes discrets, par des procédures numériques similaires à celles utilisées dans le cas continu, ce que nous croyons

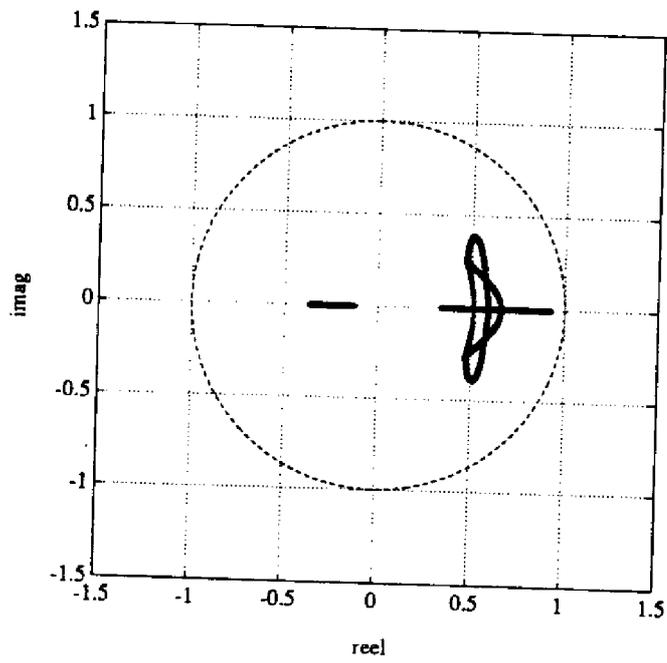
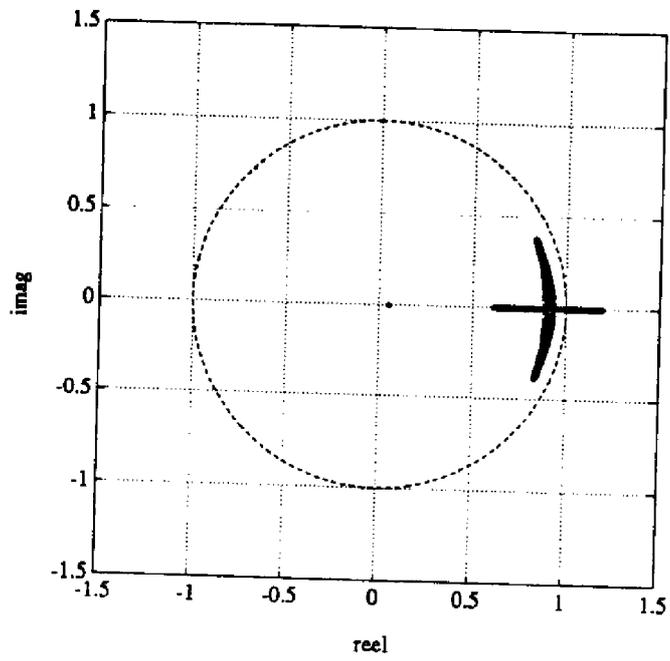


Figure 4.9 : lieux des racines discrets — quatre points de fonctionnement

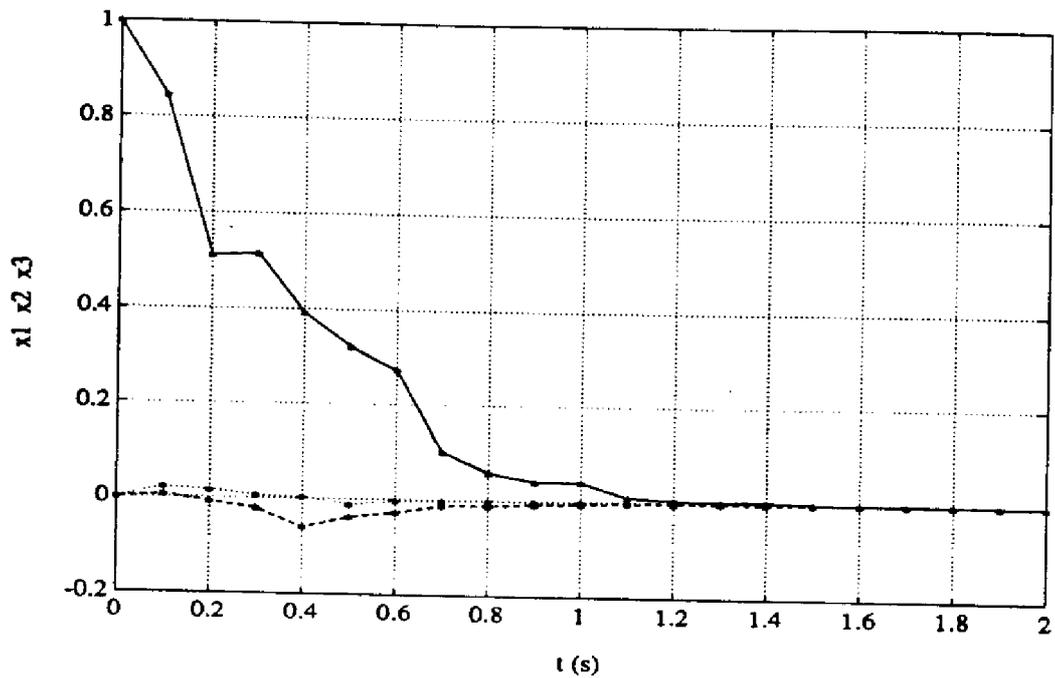


Figure 4.10 : simulation discrète — quatre points de fonctionnement

être totalement inédit dans la littérature. Un autre avantage réside, à nos yeux, dans la grande facilité de traitement des contraintes structurales (décentralisation, par exemple).



## Conclusion

Dans ce travail nous avons présenté notre contribution à l'étude des systèmes linéaires incertains. Nous avons développé une méthode d'analyse de stabilité et de synthèse de commande robuste applicable aux systèmes linéaires continus ainsi qu'aux systèmes linéaires discrets. Du point de vue de l'analyse théorique du problème, nous avons utilisé la théorie de Lyapunov, la stabilité des systèmes incertains étant subordonnée à l'existence d'une fonction quadratique de Lyapunov. A partir de cette fonction, une commande stabilisante linéaire peut être obtenue. Du côté numérique, nous avons développé une procédure d'optimisation associée au problème de la recherche d'une fonction de Lyapunov. Cette procédure tire parti de certaines propriétés de convexité pour mettre en œuvre un algorithme itératif de plans de coupe. Des propriétés telles que la convergence de l'algorithme et son caractère constructif ont été discutées.

Nous avons d'abord tracé un panorama succinct des travaux traitant du sujet. Dans les dernières années, le nombre de publications dans les revues spécialisées a beaucoup augmenté, justifiant pleinement notre intérêt vis-à-vis de l'actualité du thème. Nous avons surtout souligné l'importance des travaux sur la stabilisabilité quadratique, voie que nous avons choisie pour aborder le problème. Le concept est très simple: il s'agit d'assurer la stabilité d'un système linéaire incertain au moyen d'une fonction quadratique de Lyapunov unique. Si un système admet une telle fonction, on peut dire qu'il est stabilisable quadratiquement.

Ensuite, nous avons présenté une méthode de synthèse d'une matrice de Lyapunov. Tout d'abord, nous avons considéré un système linéaire précisément connu, pour lequel l'existence d'une fonction quadratique de Lyapunov est une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité. Nous avons présenté le problème d'optimisation ainsi que l'algorithme numérique associés à la recherche de cette matrice. La convergence de l'algorithme et la détermination d'un gain stabilisant ont été discutées en détail. Nous avons montré aussi comment la contrainte de décentralisation peut aisément être prise en compte sans aucun surcroît de tâche de calcul.

Nous avons ensuite considéré le cas des systèmes incertains. D'abord pour un système linéaire avec la matrice d'entrée constante, des résultats concernant sa stabilisabilité quadratique ont été établis. La formulation du problème permet l'application de l'algorithme présenté auparavant. La contrainte de décentralisation peut aussi être incorporée et toutes les propriétés de convexité restent valables. Puis, nous avons donné une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique par retour d'état linéaire pour des systèmes linéaires incertains, avec des incertitudes présentes sur la matrice dynamique et sur la matrice d'entrée. Nos hypothèses, contrairement à celles qui existent actuellement dans la littérature, n'imposent pas a priori de formes précises pour l'incertitude; seule la convexité du domaine paramétrique d'incertitude est nécessaire. Nous avons présenté, pour les domaines d'incertitude polyédriques, une procédure itérative qui recherche les matrices satisfaisant les conditions théoriques et qui obtient toujours une solution, si elle existe. Cette procédure utilise la programmation linéaire et la technique de plans sécants. La nouveauté par rapport aux algorithmes précédents est l'incorporation d'un souci sur la norme du gain linéaire stabilisant. La contrainte de décentralisation est facilement prise en compte.

En utilisant une formulation dynamique étendue, nous avons repris les résultats concernant les systèmes linéaires continus avec la matrice dynamique et la matrice d'entrée incertaines. La formulation étendue a permis une description plus compacte du problème et de sa solution, sans amener une augmentation du nombre de variables intervenant dans la procédure numérique. De plus, nous sommes parvenus à expliciter la minimisation d'une borne supérieure de la norme du gain robuste dans le problème d'optimisation, tout en gardant les mêmes caractéristiques telles que la possibilité de prendre en compte la décentralisation, la convergence et le caractère nécessaire et suffisant de la procédure.

Finalement, grâce à la formulation dynamique étendue, nous avons pu présenter les mêmes résultats concernant les systèmes linéaires discrets incertains. Nous avons établi des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisabilité quadratique par retour d'état linéaire pour des systèmes linéaires discrets incertains, où les matrices dynamique et d'entrée sont toutes deux affectées par l'incertitude. Associés aux conditions théoriques, nous avons formulé un problème d'optimisation et une procédure itérative, similaires à ceux du cas continu, qui incluent la minimisation de la norme du gain stabilisant et permettent d'incorporer la décentralisation.

Plusieurs exemples illustratifs, traités dans la littérature, ont permis de comparer les méthodes développées avec d'autres méthodes existantes.

Notre travail n'a sûrement pas épuisé le thème. Nous discernons quelques voies

de recherche, certaines déjà entamées comme le problème du retour de sortie pour des systèmes linéaires incertains. Il est fort probable que dans un système réel l'accès à toutes les variables d'état soit impossible, d'où l'intérêt certain du problème. La présence de l'incertitude peut être confinée, dans un premier temps, aux matrices dynamiques et d'entrée du système. Ensuite, il faudra s'attaquer aux problèmes où la matrice de sortie est aussi incertaine.

Un deuxième axe de recherche se présente au niveau de l'ensemble d'incertitudes considéré. La méthode présentée a été appliquée, dans ce mémoire, uniquement aux incertitudes paramétriques décrites par des ensembles polyédriques, bien que les résultats théoriques soient valables pour n'importe quel type d'incertitude défini par un domaine paramétrique convexe. Par exemple, on peut imaginer une méthode de plans sécants à deux niveaux, où le domaine convexe est transformé en polyèdre, sur lequel la procédure standard est ensuite appliquée.

Du point de vue de l'optimisation, l'algorithme développé permet encore des améliorations, comme par exemple l'élimination de contraintes redondantes dans le problème de programmation linéaire de l'algorithme. Une autre possibilité serait l'utilisation d'une méthode de décomposition, par exemple, Dantzig-Wolfe [29], qui équivaldrait, pour des domaines d'incertitude polyédriques, à résoudre des groupes de sommets séparément.



## Références

- [1] B.D.O.Anderson, E.I.Jury and M.Mansour - On Robust Hurwitz Polynomials, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-32, No. 10, pp. 909-913, October 1987
- [2] B.R.Barmish - Stabilization of Uncertain Systems Via Linear Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 28, No. 8, pp. 848-850, August 1983
- [3] B.R.Barmish - Invariance of the Strict Hurwitz Property for Polynomials with Perturbed Coefficients, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-29, No. 10, pp. 935-936, October 1984
- [4] B.R.Barmish - Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System, *Journal of Optimisation Theory and Applications*, vol. 46, No. 4, pp. 399-408, August 1985
- [5] B.R.Barmish - Kharitonov's Theorem and Its Extensions and Applications: An Introduction, *Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control*, pp. 2060-2061, Los Angeles, USA, December 1987
- [6] B.R.Barmish , M.Corless and G.Leitmann - A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Dynamical Systems, *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 21, No. 2, pp. 246-255, March 1983
- [7] B.R.Barmish and G.Leitmann - On Ultimate Boundedness Control of Uncertain Systems in the Absence of Matching Assumptions, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-27, No. 1, pp. 153-158, February 1982
- [8] J.Bernussou, J.C.Geromel et P.L.D.Peres - Stabilisabilité de Systèmes Linéaires: Tests par Programmation Linéaire, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences CRAS - Paris*, t. 307, Série I, p. 683-688, 1988

- [9] J.Bernussou, J.C.Geromel and P.L.D.Peres - A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems, *System & Control Letters*, vol. 13, pp. 65-72, July 1989
- [10] J.Bernussou, P.L.D.Peres and J.C.Geromel - Robust Decentralized Regulation: A Linear Programming Approach, *IFAC/IFORS/IMACS Symposium — Large Scale Systems: Theory and Applications*, vol. 1, pp. 135-138, Berlin GDR, August 1989
- [11] J.Bernussou, P.L.D.Peres and J.C.Geromel - Quadratic Stabilizability of Uncertain Dynamical Systems: The Continuous and Discrete Case, *proposé - 11st IFAC World Congress on Automatic Control*, Tallinn USSR, August 1990
- [12] R.M.Biernacki, H.Hwang and S.P.Bhattacharyya - Robust Stability with Structured Real Parameter Perturbations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-32, No. 6, pp. 495-505, June 1987
- [13] M.Corless and G.Leitman - Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, No. 5, pp. 1139-1144, October 1981
- [14] S.S.L.Chang and T.K.C.Peng - Adaptive Guaranteed Cost Control of Systems with Uncertain Parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-17, No. 4, pp. 474-483, August 1972
- [15] M.Fu and B.R.Barmish - Maximal Unidirectional Perturbation Bounds for Stability of Polynomials and Matrices, *Systems & Control Letters*, vol. 11, No. 3, pp. 173-179, September 1988
- [16] A.R.Galimidi and B.R.Barmish - The Constrained Lyapunov Problem and Its Application to Robust Output Feedback Stabilization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 31, No. 5, pp. 410-419, May 1986
- [17] J.C.Geromel - A Convex Analysis and Global Optimisation Actuator Location and Control Problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 7, pp. 711-720, July 1989
- [18] J.C.Geromel, J.Bernussou and P.L.D.Peres - Stabilizability of Uncertain Linear Systems via Linear Programming, *IEEE Proceedings of 27th Conference on Decision and Control*, vol. 3, pp. 1771-1775, Austin, Texas, USA, December 1988

- [19] J.C.Geromel, P.L.D.Peres and J.Bernussou - On a Convex Parameter Space Method for Linear System Control Design, *proposé*
- [20] S.Gutman - Uncertain Dynamical Systems — A Lyapunov Min-Max Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 24, No. 3, pp. 437-443, June 1979
- [21] H.P.Horisberger and P.R.Bélanger - Regulators for Linear, Time Invariant Plants with Uncertain Parameters, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-21, No. 5, pp. 705-708, October 1976
- [22] C.V.Hollot - Bound Invariant Lyapunov Functions: A Means for Enlarging the Class of Stabilizable Uncertain Systems, *International Journal of Control*, Vol. 46, No. 1, pp. 161-184, July 1987
- [23] C.V.Hollot and B.R.Barmish - Optimal Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems, *Proceedings of the 18th Allerton Conference on Communication, Control and Computation*, pp. 697-706, University of Illinois, Monticello, 1980
- [24] D.C.Hyland and D.S.Bernstein - The Majorant Lyapunov Equation: A Non-negative Matrix Equation for Guaranteed Robust Stability and Performance of Large Scale Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-32, No. 11, pp. 1005-1013, November 1987
- [25] L.H.Keel, S.P.Bhattacharyya and J.W.Howze - Robust Control with Structured Perturbations, *Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control*, pp. 2064-2069, Los Angeles, USA, December 1987
- [26] L.H.Keel, S.P.Bhattacharyya and J.W.Howze - Robust Control with Structured Perturbations, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-33, No. 1, pp. 68-78, January 1988
- [27] P.P.Khargonekar and M.A.Rotea - Stabilization of Uncertain Systems With Norm Bounded Uncertainty Using Control Lyapunov Functions, *Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control*, pp. 503-507A, Austin, USA, December 1988
- [28] V.L.Kharitonov - Asymptotic Stability of an Equilibrium Position of a Family of Systems of Linear Differential Equations, *Differentstal Uravnen*, Vol. 14, No. 11, pp. 2086-2088, 1978

- [29] L.S.Lasdon, *Optimization Theory for Large Scale Systems*, New York, 1970
- [30] G.Leitman - Guaranteed Ultimate Boundedness for a Class of Uncertain Linear Dynamic Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-21, No. 6, pp. 1109-1110, December 1978
- [31] D.G.Luenberger, *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1973
- [32] A.M.Lyapunov - Problème Général de la Stabilité du Mouvement, 1893; Vol. 30, Nachdruck Academic Press, 1966, New York, USA
- [33] E.Noldus - Design of Robust State Feedback Laws, *International Journal of Control*, Vol. 35, No. 6, pp. 935-944, June 1982
- [34] R.V.Patel and M.Toda - Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems, *Proceedings of Joint Automatic Control Conference*, paper TP8-A, San Francisco, CA, USA, 1980
- [35] P.L.D.Peres, J.Bernussou and J.C.Geromel - Stabilisation de Systèmes Linéaires Incertains par Approche de Programmation Linéaire, *Rapport Interne LAAS du CNRS*, No. 88205, Toulouse, France, Juillet 1988
- [36] P.L.D.Peres, J.Bernussou and J.C.Geromel - A Cutting Plane Technique Applied to Robust Control Synthesis, *8th IFAC Workshop — Control Applications of Nonlinear Programming and Optimization*, pp. 177-186, Paris FRANCE, June 1989
- [37] I.R.Petersen - Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems: Existence of a Nonlinear Stabilizing Control Does Not Imply Existence of a Linear Stabilizing Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-30, No. 3, pp. 291-293, March 1985
- [38] I.R.Petersen - A Procedure for Simultaneously Stabilizing a Collection of Single Input Linear Systems Using Non-Linear State Feedback Control, *Automatica*, vol. 23, No. 1, pp. 33-40, January 1987
- [39] I.R.Petersen - A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems, *System & Control Letters*, Vol. 8, No. 4, pp. 351-357, March 1987
- [40] I.R.Petersen - A New Extension to Kharitonov's Theorem, *Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control*, pp. 2070-2075, Los Angeles, USA, December 1987

- [41] I.R.Petersen - Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems Containing Both Constant and Time-Varying Uncertain Parameters, *Journal of Optimisation Theory and Applications*, vol. 57, No. 3, pp. 439-461, June 1988
- [42] I.R.Petersen - Stabilization of an Uncertain Linear System in Which Uncertain Parameters Enter into the Input Matrix, *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 26, No. 6, pp. 1257-1264, November 1988
- [43] I.R.Petersen and B.R.Barmish - Control Effort Considerations in the Stabilization of Uncertain Dynamical Systems, *Systems & Control Letters*, vol. 9, No. 5, pp. 417-422, November 1987
- [44] I.R.Petersen and C.V.Hollot - A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems, *Automatica*, vol. 22, No. 4, pp. 397-411, July 1986
- [45] R.Santos-Mendes - Synthèse de Régulateurs Robustes à Placement de Pôles, *Thèse de Doctorat de l'UPS - LAAS du CNRS*, Toulouse, France, 1988
- [46] C.B.Soh, C.S.Berger and K.P.Dabke - On the Stability Properties of Polynomials with Perturbed Coefficients, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-30, No. 10, pp. 1033-1036, October 1985
- [47] W.E.Schmitendorf - Designing Stabilizing Controllers for Uncertain Systems Using the Riccati Equation Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-33, No. 4, pp. 376-378, April 1988
- [48] H.L.Stalford - Robust Control of Uncertain Systems in The Absence of Matching Conditions: Scalar Input, *Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control*, pp. 1298-1307, Los Angeles, USA, December 1987
- [49] J.S.Thorp and B.R.Barmish - On Guaranteed Stability of Uncertain Linear Systems via Linear Control, *Journal of Optimisation Theory and Applications*, vol. 35, No. 4, pp. 559-579, December 1981
- [50] C.Verde and P.M.Frank - A Design Procedure for Robust Linear Suboptimal Regulators with Preassigned Trajectory Sensitivity, *Proceedings of the 21st Conference on Decision and Control*, pp. 886-890, Orlando, USA, December 1982

- [51] A.Vinkler and L.J.Wood - Multistep Guaranteed Cost Control of Linear Systems with Uncertain Parameters, *Journal of Guidance and Control*, vol. 2, No. 6, pp. 449-456, November-December 1979
- [52] K.H.Wei and R.K.Yedavalli - Invariance of Strict Hurwitz Property for Uncertain Polynomials with Dependent Coefficients, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-32, No. 10, pp. 907-909, October 1987
- [53] R.K.Yedavalli - Improved Measures of Stability Robustness for Linear State Space Models, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-30, No. 6, pp. 577-579, June 1985
- [54] K.S.Yeung and S.S.Wang - A Simple Proof of Kharitonov's Theorem, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-32, No. 9, pp. 822-823, September 1987
- [55] K.Zhou and P.P.Khargonekar - Robust Stabilization of Linear Systems With Norm-Bounded Time-Varying Uncertainty, *Systems & Control Letters*, vol. 10, No. 1, pp. 17-20, January 1988
- [56] K.Zhou and P.P.Khargonekar - On the Stabilization of Uncertain Systems via Bound Invariant Lyapunov Functions, *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol. 26, No. 6, pp. 1264-1273, November 1988
- [57] M.A.Zohdy, N.K.Loh and A.A.Abdul-Wahab - A Robust Optimal Model Matching Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-32, No. 5, pp. 410-414, May 1987

## Annexe A

# Quelques Concepts en Optimisation

### A.1 Introduction

Dans cet appendice, nous donnons de manière brève quelques notions de convexité d'ensemble et de fonctions de matrices. Les références bibliographiques sont surtout les ouvrages de Luenberger [31] et Lasdon [29]. En ce qui concerne les définitions de convexité de fonctions non différentiables, ainsi que l'utilisation de sous-gradients en méthodes d'optimisation, thèmes assez récents, nous indiquons le travail de Geromel [17] et références comprises.

Les propriétés de convexité sont essentielles dans notre travail, car elles permettent la mise en œuvre d'algorithmes performants pour la résolution de problèmes de stabilisabilité et commande robuste de systèmes incertains.

Les fonctions de matrices employées ici, non différentiables, possèdent toutefois des sous-gradients, et ceux-ci peuvent être utilisés pour générer des hyperplans de coupe, permettant l'élaboration d'un algorithme itératif de plans sécants.

### A.2 Convexité d'Ensembles

Nous donnons simplement quelques définitions et propriétés.

**Définition A.1** Un ensemble  $C \in \mathbb{R}^n$  est convexe si  $\forall x, y \in C$  et  $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

Autrement dit, un ensemble est convexe si, pour toute paire de points  $x, y$  choisie à l'intérieur de l'ensemble, tout le segment qui unit  $x$  à  $y$  appartient aussi à l'ensemble. La figure A.1 illustre cet idée.

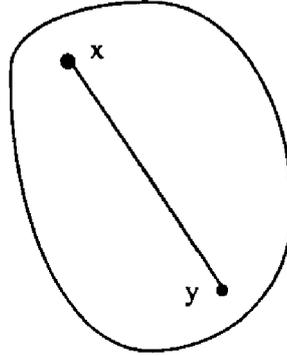


Figure A.1 : ensemble convexe

Les ensembles convexes dans  $\mathbb{R}^n$  ont des propriétés suivantes:

- Si  $C$  est un ensemble convexe et  $\alpha$  un scalaire, alors l'ensemble  $C_\alpha$  défini par

$$C_\alpha \triangleq \{y : y = \alpha x, x \in C\}$$

est aussi convexe.

- Si  $C_1$  et  $C_2$  sont des ensembles convexes, alors l'ensemble

$$C_1 + C_2 \triangleq \{z : z = x + y, x \in C_1, y \in C_2\}$$

est aussi convexe.

- L'intersection d'ensembles convexes est aussi convexe.

### A.3 Fonctions de Matrices

Nous énonçons rapidement quelques définitions et passons tout de suite aux résultats sur les fonctions de matrices non différentiables.

**Définition A.2** Une fonction  $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction convexe si pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad \forall 0 \leq \lambda \leq 1$$

Pour une fonction convexe, un minimum local est aussi un minimum global. L'ensemble

$$C_f(\theta) \triangleq \{x : f(x) \leq \theta\}$$

est aussi convexe  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ .

Soit  $f(\cdot)$  une fonction continue différentiable. Alors  $f(\cdot)$  est convexe si et seulement si

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)'(y - x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

où  $\nabla f(x)$  est le gradient de  $f(\cdot)$  calculé en  $x$ .

**Définition A.3** Soit  $f(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  une fonction convexe. L'ensemble des sous-gradients  $\partial f(x_0)$  de  $f(x)$  en  $x_0$  peut être caractérisé par tous les  $\mu(x_0)$  satisfaisant

$$f(x) \geq f(x_0) + \mu(x_0)'(x - x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Evidemment, si  $f(x)$  est différentiable alors  $\mu(x_0) = \nabla f(x_0)$  est le seul élément de  $\partial f(x_0)$ . En outre,  $\mu(x_0)$  est l'inclinaison d'un hyperplan support de  $f(\cdot)$  au point  $x_0$ .

Maintenant, nous allons montrer que la fonction  $f(W) = \lambda_{\min}(W)$ , pour des matrices  $W$  symétriques définies positives, est une fonction concave par rapport aux éléments de  $W$  (et donc  $\lambda_{\min}(W) \geq \epsilon$ , avec  $\epsilon$  réel, défini un ensemble convexe).

Soit l'ensemble de matrices défini par

$$C_W \triangleq \{W = W' \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0\}$$

et soit la fonction  $f(W) = \lambda_{\min}(W)$ . La fonction  $f(W)$  peut s'écrire

$$f(W) = \lambda_{\min}(W) = \min_{\|x\|=1} x'Wx$$

Donc, pour une matrice  $W_0$  quelconque appartenant à  $C_W$

$$f(W_0) = \lambda_{\min}(W_0) \Rightarrow \lambda_{\min}(W_0)x_0 = W_0x_0$$

où  $x_0$  est le vecteur propre associé à la valeur propre minimale de  $W_0$ . Alors, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(W) &\leq x_0' W x_0 \\ &\leq x_0' W_0 x_0 + x_0' W x_0 - x_0' W_0 x_0 \\ &\leq f(W_0) + x_0'(W - W_0)x_0 \\ &\leq f(W_0) + \text{Tr}\{X_0(W - W_0)\} \end{aligned} \tag{A.1}$$

où  $X_0 \triangleq x_0 x_0'$  et  $\text{Tr}\{M\}$  est la trace de la matrice  $M$ . Définissant le produit scalaire

$$\langle A, B \rangle \triangleq \text{Tr}\{AB\}$$

on peut conclure, d'après (A.1),

$$f(W) \leq f(W_0) + \langle X_0, (W - W_0) \rangle \tag{A.2}$$

et comme (A.2) est valable pour tout  $W, W_0 \in C_W$ , ceci caractérise une fonction concave. De plus,  $X_0$  est un sous-gradient de la fonction  $f(W)$  calculé en  $W_0$  ( $X_0 \in \partial f(W_0)$ ).

De façon complètement analogue, avec

$$H(W, R) = AW + WA' - BR - R'B'$$

on montre que la fonction  $h(W, R)$  définie par

$$h(W, R) \triangleq \lambda_{\max}(H(W, R)) = \max_{\|z\|=1} z' H(W, R) z$$

est une fonction convexe par rapport aux éléments de  $W$  et  $R$ . Pour  $W_0$  et  $R_0$  quelconques,  $z_0$  étant le vecteur propre associé à la valeur propre maximale de

$H(W_0, R_0)$ ,

$$\begin{aligned} h(W, R) &\geq h(W_0, R_0) + z'_0 [H(W - W_0, R - R_0)] z_0 \\ h(W, R) &\geq h(W_0, R_0) + \langle 2Z_0A, (W - W_0) \rangle - \langle 2Z_0B, (R - R_0) \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où  $Z_0 \triangleq z_0 z'_0$ . Comme (A.3) se vérifie pour tout  $W$  et  $R$ , alors la fonction  $h(W, R)$  est une fonction convexe par rapport aux éléments de  $W$  et  $R$ . Les sous-gradients par rapport à  $W$  en  $W_0$  et par rapport à  $R$  en  $R_0$  sont, respectivement,  $2Z_0A$  et  $2Z_0B$ .

L'extension au cas où la fonction  $h_{i,j}(W, R)$  est donnée par

$$\max_{ij} \{ \lambda_{maz} [A_i W + W A'_i - B_j R - R' B'_j] \}$$

pour  $i = 1 \dots N$  et  $j = 1 \dots M$  est immédiate, car il s'agit de l'intersection des domaines convexes.

Toutes les autres propriétés utilisées dans ce mémoire peuvent se démontrer de manière analogue.

## A.4 Conclusion

Nous avons donné un aperçu des propriétés de convexité de fonctions de matrices, primordiales pour la compréhension des techniques utilisées dans ce manuscrit. C'est grâce à la convexité que nous avons pu mettre en place les diverses procédures numériques performantes et ainsi résoudre le problème de la stabilisation et de la commande de systèmes linéaires incertains.

Au niveau de la méthode des plans de coupe, l'effort a été centré sur la mise en œuvre d'une procédure de programmation linéaire modifiée, car à chaque itération de l'algorithme il est nécessaire de résoudre un problème simplexe. Cette procédure a été créée de façon à optimiser les résolutions successives, avec les tableaux de départ donnés toujours par un ensemble d'inégalités, satisfaites par la solution du pas antérieur, plus une nouvelle contrainte qui "sépare" la solution précédente de l'ensemble de solutions admissibles. En outre, le traitement des variables du simplexe qui peuvent prendre des valeurs négatives a été également nécessaire.