1ª Questão: Determine o o sinal $x(t)$ cuja transformada de Fourier é dada por

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = wG_2(\omega), \quad G_{\omega_0}(\omega) = u(\omega+\omega_0/2) - u(\omega-\omega_0/2)$$

$$\mathcal{F}\{G_2(t)\} = 2\text{Sa}(\omega) = 2\frac{\text{sen}(w)}{w}, \quad \mathcal{F}\{\underbrace{tG_2(t)}_{X(t)}\} = j2\frac{d}{d\omega}\frac{\text{sen}(w)}{w} = j2\left(\frac{\cos(\omega)}{\omega} - \frac{\text{sen}(\omega)}{\omega^2}\right) = 2\pi x(-\omega)$$

$$x(t) = \frac{j}{\pi}\left(\frac{\cos(-t)}{-t} - \frac{\text{sen}(-t)}{t^2}\right) = \frac{j}{\pi}\left(\frac{\text{sen}(t)}{t^2} - \frac{\cos(t)}{t}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\exp(jt)-\exp(-jt)}{t^2} + \frac{\exp(jt)+\exp(-jt)}{jt}\right)$$

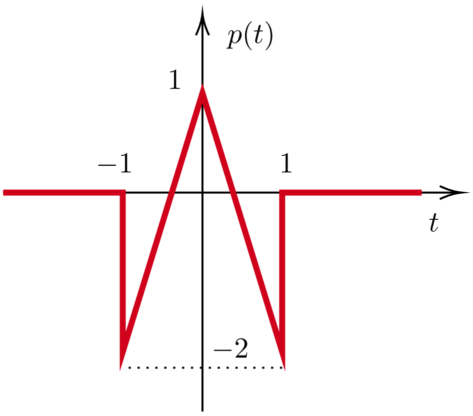
2ª Questão: a) Determine o valor máximo do intervalo T entre amostras para que o sinal $x(t)$ seja recuperado sem erro a partir do sinal amostrado $x(kT)$, $x(t) = \text{Sa}^2(5t)\,\text{sen}(30t)$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\text{Sa}^2(5t)\}*\mathcal{F}\{\text{sen}(30t)\}, \quad \mathcal{F}\{\text{Sa}^2(5t)\} = \frac{\pi}{5}\text{Tri}_{20}(\omega),\ \mathcal{F}\{\text{sen}(30t)\} = \frac{\pi}{j}\delta(\omega-30) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega+30)$$

$$\mathcal{F}\{\text{Sa}^2(5t)\text{sen}(30t)\} = \frac{\pi}{10j}\text{Tri}_{20}(\omega-30) - \frac{\pi}{10j}\text{Tri}_{20}(\omega+30),\ \omega_M = 40 = 2\pi B, \quad T < \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{40}$$

b) Considere $x(t)$ um sinal limitado em frequência cuja máxima frequência é $\pi/10$ rad/s. Determine a expressão da transformada de Fourier do filtro que recupera o sinal $x(t)$ sem distorção a partir de

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(8k)p(t-k8)$$



$$T = 8,\ \omega_0 = \frac{\pi}{4}, \quad H(j\omega) = \frac{8G_{(\pi/4)}(\omega)}{P(\omega)}, \quad \dot{p} = -2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) + \underbrace{3G_1(t+0.5) - 3G_1(t-0.5)}_{(d/dt)=3\delta(t+1)-6\delta(t)+3\delta(t-1)}$$

$$P(\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(\frac{3\exp(j\omega) - 6 + 3\exp(-j\omega)}{j\omega} + 2\exp(-j\omega) - 2\exp(j\omega)\right)$$

Ou, como $p(t) = (3t+1)G_1(t+0.5) + (-3t+1)G_1(t-0.5)$, tem-se $\mathcal{F}\{G_1(t)\} = \text{Sa}(\omega/2)$

$$\mathcal{F}\{G_1(t+0.5)\} = \text{Sa}(\omega/2)\exp(j\omega/2) = \frac{\exp(j\omega)-1}{j\omega},\ \mathcal{F}\{G_1(t-0.5)\} = \text{Sa}(\omega/2)\exp(-j\omega/2) = \frac{1-\exp(-j\omega)}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}\{tG_1(t+0.5)\} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\exp(j\omega)-1}{j\omega}\right) = \frac{-\exp(j\omega)}{j\omega} - \frac{\exp(j\omega)-1}{\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\{tG_1(t-0.5)\} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1-\exp(-j\omega)}{j\omega}\right) = \frac{-\exp(-j\omega)}{j\omega} - \frac{1-\exp(-j\omega)}{\omega^2}$$

Assim,

$$P(\omega) = 3\left(\frac{-\exp(j\omega)}{j\omega} - \frac{\exp(j\omega)-1}{\omega^2}\right) + \frac{\exp(j\omega)-1}{j\omega} - 3\left(\frac{-\exp(-j\omega)}{j\omega} - \frac{1-\exp(-j\omega)}{\omega^2}\right) + \frac{1-\exp(-j\omega)}{j\omega}$$

$$= \frac{(-3\exp(j\omega) - 3\exp(-j\omega) + 6)}{\omega^2} + \frac{(-2\exp(j\omega) + 2\exp(-j\omega))}{j\omega}$$

3ª Questão: Determine a transformada (bilateral) de Laplace $\mathcal{L}\{x(t)\}$ e o domínio associado de existência Ω_x para o sinal $x(t) = -9t^4 \exp(2t)u(-t)$

$$y(t) = x(-t) = -9t^4 \exp(-2t)u(t) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{-216}{(s+2)^5}, \ \mathrm{Re}(s) > -2$$

$$X(s) = Y(-s) = \frac{-216}{(-s+2)^5} = \frac{216}{(s-2)^5}, \ \mathrm{Re}(-s) > -2 \quad \Rightarrow \quad \Omega_x = \mathrm{Re}(s) < 2$$

4ª Questão: Determine a resposta à rampa $y_r(t)$ (condições iniciais nulas) do sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial $\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 20x$

$$H(s) = \frac{20}{(s+1)(s+5)}, \quad X(s) = 1/s^2$$

$$Y_r(s) = \left(\frac{20}{(s+1)(s+5)}\right)\frac{1}{s^2} = \frac{4}{s^2} - \frac{(24/5)}{s} + \frac{5}{s+1} - \frac{(1/5)}{s+5}$$

$$y_r(t) = \Big(4t - \frac{24}{5} + 5\exp(-t) - \frac{1}{5}\exp(-5t)\Big)u(t)$$

5ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 4\exp(-3t), \quad y(0) = 5, \ \dot{y}(0) = -18$$

a) Determine a solução forçada $y_f(t)$
b) Determine a solução
c) Determine uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução do item b)

$$y_f(t) = 2t^2\exp(-3t), \quad y(t) = \big(2t^2 - 3t + 5\big)\exp(-3t)$$

$$(p+3)^3 y = 0, \quad y(0) = 5, \ \dot{y}(0) = -18, \ \ddot{y}(0) = 67$$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -\, v_2(v_1+1)(v_2-1) + 3x^2 \\ \dot{v}_2 &= -\,(v_1+3)(v_2+2) - x \end{aligned}$$

$$(-3,0), \quad (-1,-2), \quad (-3,1)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -v_2(v_2-1) & -(v_1+1)(v_2-1) - v_2(v_1+1) \\ -(v_2+2) & -(v_1+3) \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 6x \\ -1 \end{bmatrix} x$$

$$(-3,1): \ \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ indeterminado, autovalores puramente imaginários}$$

$$(-3,0): \ \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ instável, um autovalor com parte real positiva}$$

$$(-1,-2): \ \dot{v} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ assint. estável, autovalores com parte real negativa}$$