1ª Questão: Considere o sistema discreto definido pela relação entrada-saída

$$y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\big(\delta[n-k] + 2\delta[k] + \delta[n+k]\big)$$

Classifique o sistema quanto a: linearidade, variante ou invariante no tempo, causalidade e BIBO estabilidade (justificando)

Sistema linear, pois para

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k](\delta[n-k] + 2\delta[k] + \delta[n+k]), \quad y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k](\delta[n-k] + 2\delta[k] + \delta[n+k])$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 x_1[k] + \alpha_2 x_2[k])(\delta[n-k] + 2\delta[k] + \delta[n+k]) = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$$

Sistema variante no tempo, pois para $x_2[n] = x_1[n-m]$ tem-se (com $\ell = k - m$, $k = \ell + m$)

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k-m]\big(\delta[n-k] + 2\delta[k] + \delta[n+k]\big) = x_1[n-m] + 2x_1[-m] + x_1[-n-m]$$

$$\neq y_1[n-m] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]\big(\delta[n-m-k] + 2\delta[k] + \delta[n-m+k]\big) = x_1[n-m] + 2x_1[0] + x_1[-n+m]$$

Sistema BIBO-estável, pois

$$|x[n]| < b \quad \Rightarrow \quad |y[n]| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]|\big(\delta[n-k] + 2\delta[k] + \delta[n+k]\big) < 4b$$

Sistema não causal, pois $y[n]$ depende de $x[-n]$ (por exemplo, $y[-1]$ depende de $x[1]$)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\big(\delta[n-k] + 2\delta[k] + \delta[n+k]\big) = x[n] + 2x[0] + x[-n]$$

2ª Questão: Determine $x[n]$ cuja transformada Z é dada por $X(z) = \dfrac{2z^3 - 12z^2 + 28z}{(z-2)^2(z-5)}, \quad 2 < |z| < 5$

$$X(z) = \frac{2z^3 - 12z^2 + 28z}{(z-2)^2(z-5)} = \frac{-4z}{(z-2)^2} + \frac{2z}{z-5} \quad \Rightarrow \quad x[n] = -4n2^{n-1}u[n] - 2(5)^n u[-n-1]$$

3ª Questão: Determine, para a variável aleatória $\mathbb{X}$ cuja transformada Z da distribuição de probabilidade $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{4z}{(z-3)^2}, \quad |z| < 3$$

a) A média da variável $\mathbb{X}$, isto é, $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\}$ b) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$ c) $\Pr\{\mathbb{X} = 2\}$

a) Média $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \left(z\dfrac{d}{dz}\right)\left(\dfrac{4z}{(z-3)^2}\right)\Big|_{z=1} = z\left(\dfrac{4}{(z-3)^2} - \dfrac{8z}{(z-3)^3}\right)\Big|_{z=1} = 2$

b) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\} = \dfrac{d}{dz}X(z)\Big|_{z=0} = \left(\dfrac{4}{(z-3)^2} - \dfrac{8z}{(z-3)^3}\right)\Big|_{z=0} = \dfrac{4}{9}$

c) Taylor: $\Pr\{\mathbb{X} = 2\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dz^2}X(z)\Big|_{z=0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8z+48}{(z-3)^4}\right)\Big|_{z=0} = \dfrac{24}{81} = \dfrac{8}{27}$

4ª Questão: Determine: a) $Y(z) = \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\}$, a transformada Z da solução da equação a diferenças abaixo, para $x[n] = 0$ e $n \geq 0$

$$y[n+2] + 2y[n+1] + y[n] = x[n], \quad y[0] = 5, \; y[1] = -4$$

b) A expressão de $x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ (solução causal) para entrada nula

$$Y(s) = \frac{z^2 y[0] + z(y[1] + 2y[0])}{(z+1)^2} = \frac{z^2 y[0]}{(z+1)^2} + \frac{z(y[1] + 2y[0])}{(z+1)^2} = 5\frac{z^2}{(z+1)^2} + \frac{6z}{(z+1)^2}$$

Note que a transformada inversa pode ser obtida para esses dois termos utilizando as propriedades Combinatória e Combinatória com deslocamento, resultando em

$$y[n] = \binom{n+1}{1}(-1)^n y[0]u[n] + \binom{n}{1}(-1)^{n-1}(y[1] + 2y[0])u[n]$$

ou, substituindo as condições iniciais, em

$$y[n] = \big(5(n+1)(-1)^n + 6n(-1)^{n-1}\big)u[n] = \big(-n(-1)^n + 5(-1)^n\big)u[n]$$

Alternativamente, por decomposição em frações parciais, tem-se

$$Y(s) = \frac{5z^2 + 6z}{(z+1)^2} = \frac{z}{(z+1)^2} + \frac{5z}{z+1} \quad \Rightarrow \quad \big(n(-1)^{n-1} + 5(-1)^n\big)u[n]$$

c) A solução forçada para a entrada $x[n] = (-1)^n \quad \Rightarrow \quad y_f[n] = bn^2(-1)^n$

$$b(n+2)^2(-1)^{n+2} + 2b(n+1)^2(-1)^{n+1} + bn^2(-1)^n = (-1)^n \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

d) A solução $y[n]$ para $x[n] = (-1)^n$, $y[0] = 5$ e $y[1] = -4$

$$y[n] = \frac{1}{2}n^2(-1)^n + a_1(-1)^n + a_2 n(-1)^n \quad \Rightarrow \quad a_1 = 5, \; a_2 = -\frac{3}{2}$$

e) Obtenha uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais de forma que a solução coincida com a solução da equação não homogênea do item d)

$$(p+1)^3 y[n] = 0, \; y[0] = 5, \; y[1] = -4, \; y[2] = 4$$

5ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = (t+2)G_2(t+1) - G_2(t-1), \quad G_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$$

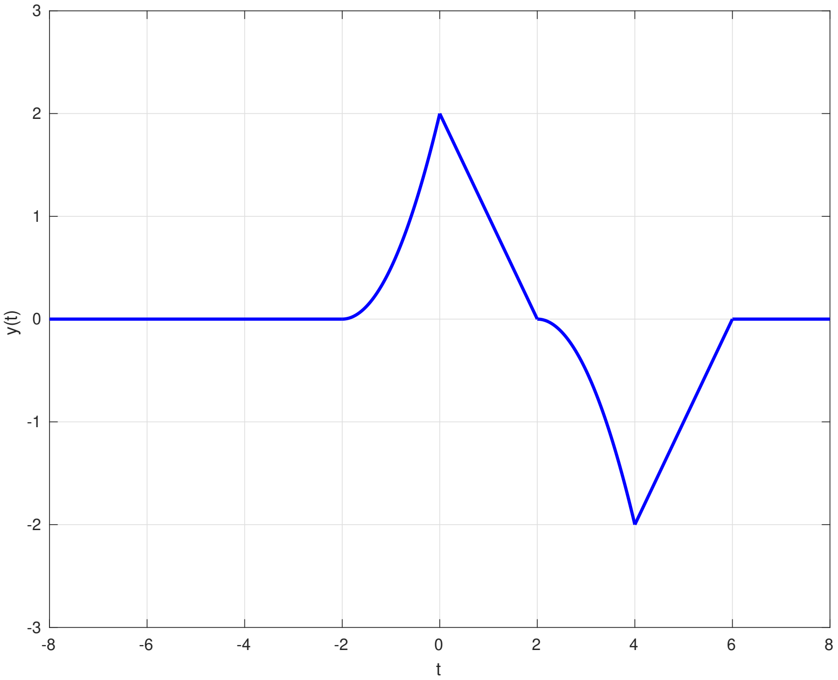
a) Classifique o sistema quanto a: causalidade e BIBO estabilidade (justificando)
BIBO estável ($h(t)$ é absolutamente integrável) e não causal ($h(t) \neq 0$, $t < 0$)

b) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada $x(t) = G_4(t-2)$

$$x(t) = G_4(t-2) = u(t) - u(t-4) \quad \Rightarrow \quad y(t) = x(t) * h(t) = \mathcal{I}_h(t) - \mathcal{I}_h(t-4)$$

$$\mathcal{I}_h(t) = \Big(\frac{t^2}{2} + 2t + 2\Big)G_2(t+1) + (2-t)G_2(t-1)$$

$$y(t) = \Big(\frac{t^2}{2}+2t+2\Big)G_2(t+1)+(2-t)G_2(t-1)-\bigg(\Big(\frac{(t-4)^2}{2}+2(t-4)+2\Big)G_2(t-3)+(6-t)G_2(t-5)\bigg)$$



6ª Questão: Usando o procedimento de Gram-Schmidt, determine um conjunto de sinais ortogonais $\{g_1(t), g_2(t), g_3(t)\}$ a partir dos sinais

$$f_1(t) = G_4(t-2), \quad f_2(t) = G_2(t-1), \quad f_3(t) = G_2(t-2)$$

e esboce os dois conjuntos.

$$g_1 = f_1 = G_4(t-2), \quad g_2 = f_2 - \frac{1}{2}g_1 = \frac{1}{2}G_2(t-1) - \frac{1}{2}G_2(t-3)$$

$$g_3 = f_3 - \frac{1}{2}g_1 = -\frac{1}{2}G_1(t-0.5) + \frac{1}{2}G_2(t-1) - \frac{1}{2}G_1(t-3.5)$$

7ª Questão: a) Determine os coeficientes c_k da série exponencial de Fourier de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t-k5) \quad , \quad p(t) = tG_1(t-0.5) - G_1(t-1.5)$$

b) Calcule c_0: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{5}, \quad c_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T p(t)dt = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right) = -0.1$

$$\frac{d}{dt}p(t) = \underbrace{G_1(t-0.5)}_{\frac{d}{dt}=\delta(t)-\delta(t-1)} -2\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

$$c_k = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{jk\omega_0}\Big(\frac{1-\exp(-jk\omega_0)}{jk\omega_0} - 2\exp(-jk\omega_0) + \exp(j2k\omega_0)\Big)\right)$$

c) Determine a potência média: $\dfrac{1}{5}\Big(\displaystyle\int_0^1 |t|^2 dt + \int_1^2 |-1| dt\Big) = \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{3}+1\Big) = \frac{4}{15}$