$1^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine o valor da integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sa}^2(t/2)x(t)dt, \quad \mathcal{F}\{x(t)\} = (1-\omega^2)G_2(\omega), \quad \mathrm{Sa}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$$

$$I = \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(t/2)x(t)\}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(t/2)\} * \mathcal{F}\{x(t)\}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi \mathrm{Tri}_2(\omega)\right) * (1-\omega^2)G_2(\omega)\Big|_{\omega=0}$$

$$= \int_{-1}^{0}(\omega+1)(1-\omega^2)d\omega + \int_{0}^{1}(-\omega+1)(1-\omega^2)d\omega = \int_{-1}^{0}(-\omega^3-\omega^2+\omega+1)d\omega + \int_{0}^{1}(\omega^3-\omega^2-\omega+1)d\omega$$

$$= \left(-\frac{\omega^4}{4} - \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^2}{2} + \omega\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{\omega^4}{4} - \frac{\omega^3}{3} - \frac{\omega^2}{2} + \omega\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{5}{6}$$

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** a) Determine o valor máximo do intervalo T entre amostras para que o sinal $x(t)$ seja recuperado sem erro a partir do sinal amostrado $x(kT)$

$$x(t) = \mathrm{Sa}^5(t)\mathrm{Sa}^2(4t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^5(t)\} * \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(4t)\}, \qquad \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}(t)\} = \pi G_2(\omega), \quad \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(4t)\} = \frac{\pi}{4}\mathrm{Tri}_{16}(\omega)$$

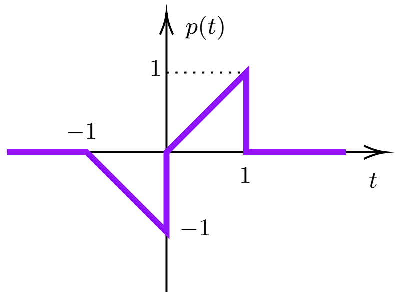
$$\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^5(t)\} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 (\pi)^5 G_2(\omega) * G_2(\omega) * G_2(\omega) * G_2(\omega) * G_2(\omega)$$

Como a largura total da convolução dos *gates* é igual à soma das larguras, tem-se

$$\omega_M = \frac{2+2+2+2+2+16}{2} = 13 = 2\pi B, \quad T < \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{13}$$

b) Considere $x(t)$ um sinal limitado em frequência cuja máxima frequência é $\pi/4$ rad/s. Determine a expressão da transformada de Fourier do filtro que recupera o sinal $x(t)$ sem distorção a partir de

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(3k)p(t-k3)$$



$$T = 3, \ \omega_0 = \frac{2\pi}{3}, \quad H(j\omega) = \frac{3G_{(2\pi/3)}(\omega)}{P(\omega)}, \quad P(\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(\frac{2-\exp(j\omega)-\exp(-j\omega)}{j\omega} + 1 - \exp(-j\omega)\right)$$

Ou, como $p(t) = (-t-1)G_1(t+0.5) + tG_1(t-0.5)$, tem-se

$$\mathcal{F}\{G_1(t)\} = \mathrm{Sa}(\omega/2), \quad \mathcal{F}\{G_1(t+0.5)\} = \mathrm{Sa}(\omega/2)\exp(j\omega/2) = \frac{\exp(j\omega)-1}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}\{G_1(t-0.5)\} = \mathrm{Sa}(\omega/2)\exp(-j\omega/2) = \frac{1-\exp(-j\omega)}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}\{tG_1(t+0.5)\} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\exp(j\omega)-1}{j\omega}\right) = \frac{-\exp(j\omega)}{j\omega} - \frac{\exp(j\omega)-1}{\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\{tG_1(t-0.5)\} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1-\exp(-j\omega)}{j\omega}\right) = \frac{-\exp(-j\omega)}{j\omega} - \frac{1-\exp(-j\omega)}{\omega^2}$$

Assim,

$$P(\omega) = \frac{\exp(j\omega)}{j\omega} + \frac{\exp(j\omega)-1}{\omega^2} - \frac{\exp(j\omega)-1}{j\omega} + \frac{-\exp(-j\omega)}{j\omega} - \frac{1-\exp(-j\omega)}{\omega^2}$$

$$P(\omega) = \frac{1-\exp(-j\omega)}{j\omega} - \frac{2-\exp(j\omega)-\exp(-j\omega)}{\omega^2}$$

3ª Questão: Determine $x(t)$ cuja transformada (bilateral) de Laplace é dada por

$$X(s) = \frac{5}{(s+2)^3}, \quad \mathrm{Re}(s) < -2$$

$$Y(s) = X(-s) = \frac{5}{(-s+2)^3} = \frac{-5}{(s-2)^3}, \quad \mathrm{Re}(-s) < -2 \quad \Rightarrow \mathrm{Re}(s) > 2$$

$$y(t) = -5\frac{t^2}{2}\exp(2t)u(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = y(-t) = -5\frac{t^2}{2}\exp(-2t)u(-t)$$

4ª Questão: Determine, para o sistema linear invariante no tempo dado por

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \ \dot{y}(0) = -5$$

a) A transformada (unilateral) de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$
b) A solução $y(t)$ na forma de soma de parcelas reais

$$Y(s) = \frac{sy(0) + \dot{y}(0) + 2y(0)}{s^2+2s+2} = \frac{2s-1}{(s+1)^2+1} = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1} + \frac{-3}{(s+1)^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t) = \exp(-t)\big(2\cos(t) - 3\ \mathrm{sen}(t)\big)u(t)$$

5ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$(p-2)(p+3)y = -20\exp(-3t), \quad p = \frac{d}{dt}, \quad y(0) = 2, \ \dot{y}(0) = 23$$

a) Determine a solução forçada $y_f(t)$
b) Determine a solução
c) Determine uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução do item b)

$$y_f(t) = 4t\exp(-3t)$$

$$y(t) = 5\exp(2t) - 3\exp(-3t) + 4t\exp(-3t)$$

$$(p+3)^2(p-2)y = 0 = (p^3+4p^2-3p-18)y = 0, \quad y(0) = 2, \ \dot{y}(0) = 23, \ \ddot{y}(0) = -31$$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema abaixo para $x = 0$

$$\dot{v}_1 = (v_1-2)(v_2+4) - 5x = v_1v_2 + 4v_1 - 2v_2 - 8 - 5x$$

$$\dot{v}_2 = (v_2-3)(v_1+1) + 4x^2 = v_1v_2 - 3v_1 + v_2 - 3 + 4x^2$$

$$\text{Pontos de equilíbrio: } (2,3), \ (-1,-4)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenha-se $\dot{v} = Av + bx$

$$A = \begin{bmatrix} v_2+4 & v_1-2 \\ v_2-3 & v_1+1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Analise o comportamento local em cada ponto de equilíbrio

$$(2,3), \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{Instável, autovalor com parte real positiva}$$

$$(-1,-4), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Instável, autovalor com parte real positiva}$$