$1^{\underline{a}}$ **Questão:** Considere o sistema discreto definido pela relação entrada-saída

$$y[n] = \mathcal{G}\{x[n]\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} x[k]$$

Classifique o sistema quanto a: linearidade, variante ou invariante no tempo, causalidade e BIBO estabilidade (justificando)

Sistema linear, pois para $y_1[n] = \mathcal{G}\{x_1[n]\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} x_1[k], \quad y_2[n] = \mathcal{G}\{x_2[n]\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} x_2[k]$

$$\Rightarrow \mathcal{G}\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} (\alpha_1 x_1[k] + \alpha_2 x_2[k]) = \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$$

Sistema variante no tempo, pois para $x_2[n] = x_1[n-m]$ tem-se (com $\ell = k - m$, $k = \ell + m$)

$$y_2[n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} x_1[k-m] = \sum_{\ell=-m}^{n-m} \frac{\ell+m}{\ell+m+1} x_1[\ell] \ \neq \ y_1[n-m] = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{k}{k+1} x_1[k]$$

Sistema BIBO-estável, pois

$$|x[n]| < b \quad \Rightarrow \quad |y[n]| = \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{k}{k+1} x[k] \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |x[k]| < (n+1)b$$

Sistema causal, pois $y[n]$ depende apenas de entradas anteriores

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** Determine $x[n]$ cuja transformada Z é dada por $X(z) = \dfrac{9z}{(z-3)^3}, \quad |z| < 3$

$$Y(z) = X(z^{-1}) = \frac{9z^{-1}}{(z^{-1}-3)^3} = \frac{9z^2}{(1-3z)^3} = \frac{-(1/3)z^2}{(z-1/3)^3} = -\frac{1}{3} z^{-1} \left(\frac{z^3}{(z-1/3)^3} \right), \quad |z| > (1/3)$$

Como para $|z| > (1/3)$

$$\mathcal{Z}\left\{ \frac{z^3}{(z-1/3)^3} \right\} = \begin{pmatrix} n+2 \\ 2 \end{pmatrix} (1/3)^n u[n]$$

tem-se (trocando n por $n-1$)

$$y[n] = -(1/3) \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix} (1/3)^{n-1} u[n-1] = -\frac{(n+1)n}{2} (1/3)^n u[n-1] = -\frac{(n+1)n}{2} (1/3)^n u[n]$$

e, finalmente,

$$x[n] = y[-n] = \left(\frac{(-n+1)n}{2} \right) 3^n u[-n] = \left(\frac{-n^2+n}{2} \right) 3^n u[-n]$$

Alternativamente, note que

$$Y(z) = \frac{9z^2}{(1-3z)^3} = \frac{(-1/9)z}{(z-1/3)^3} + \frac{(-1/3)z}{(z-1/3)^2}$$

$$y[n] = \left((-1/9) \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (1/3)^{n-2} + (-1/3) \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (1/3)^{n-1} \right) u[n]$$

$$= \left(\frac{-n(n-1)}{2} - n \right) (1/3)^n u[n] = \frac{-n^2-n}{2} (1/3)^n u[n] \quad \Rightarrow \quad x[n] = y[-n] = \left(\frac{-n^2+n}{2} \right) 3^n u[-n]$$

$3^{\underline{a}}$ Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \ \Pr\{\mathbb{X}=k\} = \frac{-3}{z^2-4}, \quad |z|<2$$

Determine: a) A média da variável $\mathbb{X}$, isto é, $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \ \Pr\{\mathbb{X}=k\}$ b) $\Pr\{\mathbb{X}=0\}$ c) $\Pr\{\mathbb{X}=1\}$

a) Média $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \ \Pr\{\mathbb{X}=k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{-3}{z^2-4}\right)\Big|_{z=1} = z\left(\frac{3(2z)}{(z^2-4)^2}\right)\Big|_{z=1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

b) $\Pr\{\mathbb{X}=0\} = X(z)\Big|_{z=0} = \frac{3}{4}$ c) Taylor: $\Pr\{\mathbb{X}=1\} = \frac{d}{dz}\left(\frac{-3}{z^2-4}\right)\Big|_{z=0} = \left(\frac{6z}{z^2-4}\right)\Big|_{z=0} = 0$

$4^{\underline{a}}$ Questão: a) Determine $Y(z) = \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\}$, a transformada Z da solução da equação a diferenças abaixo, para $x[n]=0$ e $n \geq 0$

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = x[n], \quad y[0]=y_0, \ y[1]=y_1 \text{ dados}$$

b) Determine $x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ (solução causal) e os valores de $y[0]$ e $y[1]$ para que a solução seja dada por $y[n] = \big(5(2)^n - 4(3)^n\big)u[n]$

$$Y(s) = \frac{z^2y_0 + zy_1 - 5y_0}{(z-2)(z-3)} = \frac{(3y_0-y_1)z}{z-2} + \frac{(-2y_0+y_1)z}{z-3} \quad \Rightarrow \quad y_0=1, \ y_1=-2, \ Y(s) = \frac{5z}{z-2} + \frac{-4z}{z-3}$$

c) Solução forçada para $x[n] = 2^{n+2}$: $y_f[n] = bn(2)^n \quad \Rightarrow \quad y_f[n] = -2n(2)^n$
d) Solução $y[n]$ para $x[n] = 2^{n+2}$ e $y_0 = y_1 = 0$: $\Rightarrow \quad y[n] = -4(2)^n + 4(3)^n - 2n(2)^n$
e) Obtenha uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais de forma que a solução coincida com a solução da equação não homogênea do item d)

$$(p-2)^2(p-3)y[n] = 0, \ y[0]=0, \ y[1]=0, \ y[2]=4$$

$5^{\underline{a}}$ Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada por

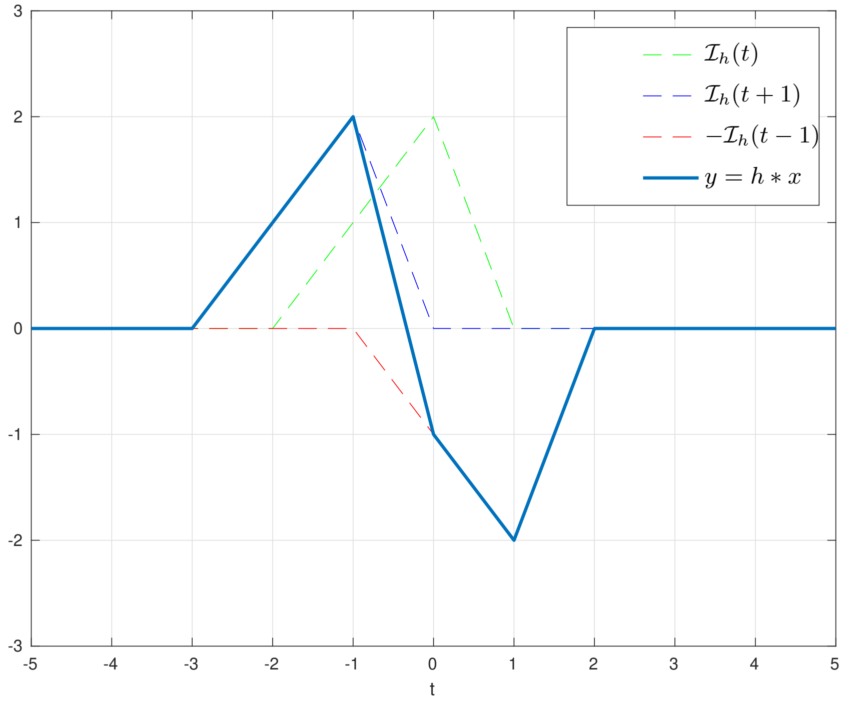
$$h(t) = G_2(t+1) - 2G_1(t-0.5), \quad G_T(t) = u(t+T/2) - u(t-T/2)$$

a) Classifique o sistema quanto a: causalidade e BIBO estabilidade (justificando)
BIBO estável ($h(t)$ é absolutamente integrável) e não causal ($h(t) \neq 0$, $t<0$)

b) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada $x(t) = G_2(t)$

$$y(t) = \mathcal{I}_h(t+1) - \mathcal{I}_h(t-1), \quad \mathcal{I}_h(t) = (t+2)G_2(t+1) + (-2t+2)G_1(t-0.5)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= (t+3)G_2(t+2) + (-2(t+1)+2)G_1(t+0.5) - (t+1)G_2(t) - (-2(t-1)+2)G_1(t-1.5) \\ &= (t+3)G_2(t+2) - 2tG_1(t+0.5) - (t+1)(G_1(t+0.5) + G_1(t-0.5)) + (2t-4)G_1(t-1.5) \\ &= (t+3)G_2(t+2) + (-3t-1)G_1(t+0.5) - (t+1)G_1(t-0.5) + (2t-4)G_1(t-1.5) \end{aligned}$$



6ª Questão: Determine a melhor aproximação (em termos de mínimos quadrados) da função $y(t) = (-t^2+2t)G_2(t-1)$ como uma combinação linear de

$$x_1(t) = (-t+2)G_2(t-1), \quad x_2(t) = G_2(t-1)$$

$$\begin{bmatrix} < x_1^2 > & < x_1 x_2 > \\ < x_2 x_1 > & < x_2^2 > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < y_1 x_1 > \\ < y_1 x_2 > \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 8/3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = 0, \ b = 2/3$$

7ª Questão: a) Determine os coeficientes c_k da série exponencial de Fourier de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t-k5) \quad , \quad p(t) = (-2t+2)G_1(t+0.5)$$

b) Calcule c_0: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{5}, \quad c_0 = \dfrac{3}{5}$

$$\frac{d}{dt}p(t) = -2G_1(t+0.5) + (-2t+2)\delta(t+1) - (-2t+2)\delta(t) = \underbrace{-2G_1(t+0.5)}_{\frac{d}{dt}=-2\delta(t+1)+2\delta(t)} + 4\delta(t+1) - 2\delta(t)$$

$$c_k = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{jk\omega_0}\Big(\frac{2-2\exp(jk\omega_0)}{jk\omega_0} + 4\exp(jk\omega_0) - 2\Big)\right)$$

c) Potência média: $\dfrac{1}{5}\Big(\displaystyle\int_{-1}^{0} |(-2t+2)|^2 dt\Big) = \dfrac{1}{5}\Big(\dfrac{4t^3}{3} - 4t^2 + 4t\Big)\Big|_{-1}^{0} = \dfrac{1}{5}\Big(\dfrac{28}{3}\Big) = \dfrac{28}{15}$