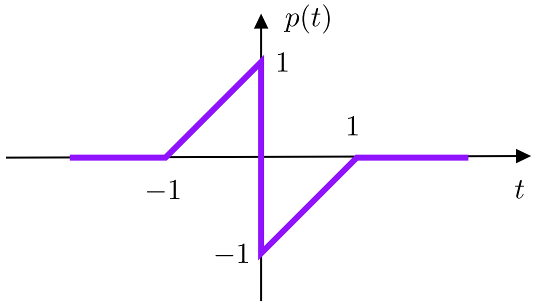
1ª Questão: a) Determine os coeficientes c_k da série exponencial de Fourier de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - k4)$$

para o pulso $p(t)$ descrito na figura ao lado.



b) Calcule c_0

$$T = 4, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad c_0 = 0, \quad c_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{jk\omega_0}\Big(\frac{\exp(jk\omega_0) - \exp(-jk\omega_0)}{jk\omega_0} - 2\Big)\right)$$

Alternativamente, $p(t) = (t+1)G_1(t+0.5) + (t-1)G_1(t-0.5), \quad c_k = \dfrac{1}{4}P(k\omega_0), \quad P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\}$

$$\mathcal{F}\{G_1(t)\} = \text{Sa}(\omega/2), \quad \mathcal{F}\{G_1(t+0.5)\} = \text{Sa}(\omega/2)\exp(j\omega/2) = \frac{\exp(j\omega) - 1}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}\{G_1(t-0.5)\} = \text{Sa}(\omega/2)\exp(-j\omega/2) = \frac{1 - \exp(-j\omega)}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}\{tG_1(t+0.5)\} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\exp(j\omega) - 1}{j\omega}\right) = \frac{-\exp(j\omega)}{j\omega} - \frac{\exp(j\omega) - 1}{\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\{tG_1(t-0.5)\} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1 - \exp(-j\omega)}{j\omega}\right) = \frac{-\exp(-j\omega)}{j\omega} - \frac{1 - \exp(-j\omega)}{\omega^2}$$

$$P(\omega) = \frac{-\exp(j\omega)}{j\omega} - \frac{\exp(j\omega) - 1}{\omega^2} + \frac{\exp(j\omega) - 1}{j\omega} + \frac{-\exp(-j\omega)}{j\omega} - \frac{1 - \exp(-j\omega)}{\omega^2} - \frac{1 - \exp(-j\omega)}{j\omega}$$

$$= \frac{-2}{j\omega} + \frac{-\exp(j\omega) + \exp(-j\omega)}{\omega^2} = \frac{-2}{j\omega} + \frac{\exp(j\omega) - \exp(-j\omega)}{(j\omega)^2}$$

c) Determine a potência média do sinal

$$\frac{1}{4}\Big(\int_{-1}^{0}(t+1)^2 dt + \int_0^1 (t-1)^2 dt\Big) = \frac{1}{4}\Big(\frac{t^3}{3} + t^2 + t\Big)\Big|_{-1}^{0} + \Big(\frac{t^3}{3} - t^2 + t\Big)\Big|_0^1\Big) = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{6}$$

2ª Questão: Determine o valor da integral $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(2t)\text{Sa}^2(5t)dt, \quad \text{Sa}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$

$$I = \mathcal{F}\{\text{Sa}(2t)\text{Sa}^2(5t)\}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\text{Sa}(2t)\} * \mathcal{F}\{\text{Sa}^2(5t)\}\Big|_{\omega=0} = \frac{\pi}{20}G_4(\omega) * \text{Tri}_{20}(\omega)\Big|_{\omega=0}$$

$$I = \frac{\pi}{20}\int_{-\infty}^{+\infty} G_4(\beta)\text{Tri}_{20}(-\beta)d\beta = \frac{\pi}{20}\left(\int_{-2}^{0}(\beta/10 + 1)d\beta + \int_0^2(-\beta/10 + 1)d\beta\right) = \frac{\pi}{20}\left(\frac{18}{5}\right) = \frac{9\pi}{50}$$

3ª Questão: a) Determine o valor máximo do intervalo T entre amostras para que o sinal $x(t)$ seja recuperado sem erro a partir do sinal amostrado $x(kT)$

$$x(t) = \prod_{i=1}^{5}\text{Sa}(t/i), \quad X(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \big(\mathcal{F}\{\text{Sa}(t)\} * \mathcal{F}\{\text{Sa}(t/2)\} * \mathcal{F}\{\text{Sa}(t/3)\} * \mathcal{F}\{\text{Sa}(t/4)\} * \mathcal{F}\{\text{Sa}(t/5)\}\big)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \big(G_2(\omega) * G_1(\omega) * G_{2/3}(\omega) * G_{1/2}(\omega) * G_{2/5}(\omega)\big)$$

Como a largura total da convolução dos *gates* é igual à soma das larguras, tem-se

$$\omega_M = \frac{2+1+2/3+1/2+2/5}{2} = \frac{137}{60} = 2\pi B, \quad T < \frac{1}{2B} = \frac{60\pi}{137}$$

b) Considere $x(t)$ um sinal limitado em frequência cuja máxima frequência é $\pi/2$ rad/s. Determine a expressão da transformada de Fourier do filtro que recupera o sinal $x(t)$ sem distorção a partir de

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)p(t-k), \quad p(t) = tG_1(t), \quad T=1,\ \omega_0 = 2\pi, \quad H(j\omega) = \frac{G_{2\pi}(\omega)}{P(\omega)}$$

$$P(\omega) = j\frac{d}{d\omega}\text{Sa}(\omega/2) = j\left(\frac{\cos(\omega/2)}{\omega} - \frac{2\text{sen}(\omega/2)}{\omega^2}\right) = -\frac{\exp(j\omega/2)+\exp(j\omega/2)}{2j\omega} - \frac{\exp(j\omega/2)-\exp(j\omega/2)}{\omega^2}$$

Ou, graficamente, $P(\omega) = \dfrac{\exp(j\omega/2)-\exp(-j\omega/2)}{(j\omega)^2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\exp(j\omega/2)+\exp(-j\omega/2)}{j\omega}\right)$

4ª Questão: Determine a transformada de Laplace $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ e o domínio de convergência Ω_x para $x(t) = -20t^3\exp(-5t)u(-t)$

$$y(t) = x(-t) = 20t^3\exp(5t)u(t), \quad Y(s) = \frac{120}{(s-5)^4},\ \text{Re}(s) > 5$$

$$Y(s) = X(-s) = \frac{120}{(-s-5)^4} = \frac{120}{(s+5)^4},\ \ \text{Re}(-s) > 5\ \Rightarrow\ \text{Re}(s) < -5$$

5ª Questão: Considere o sistema linear $\ddot{y} + 4\dot{y} + 8y = 14\ddot{x} + 38\dot{x} + 80x$

a) Determine a função de transferência $H(s) = Y(s)/X(s)$

b) Determine a resposta ao degrau (condições iniciais nulas) $y_u(t)$

$$H(s) = \frac{14s^2+38s+80}{s^2+4s+8}, \quad Y_u(s) = \frac{14s^2+38s+80}{s(s^2+4s+8)} = \frac{10}{s} + \frac{4(s+2)}{(s+2)^2+2^2} - \frac{5(2)}{(s+2)^2+2^2}$$

$$y_u(t) = \big(10 + 4\exp(-2t)\cos(2t) - 5\exp(-2t)\ \text{sen}(2t)\big)u(t)$$

6ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$p(p-2)y = 12t^2+2, \quad p = \frac{d}{dt}, \quad y(0) = 10,\ \dot{y}(0) = 0$$

a) Determine a solução forçada $y_f(t)$ b) Determine a solução

c) Determine uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução do item b)

$$y_f(t) = -2t^3 - 3t^2 - 4t, \quad y(t) = -2t^3 - 3t^2 - 4t + 8 + 2\exp(2t)$$

$$p^4(p-2)y = 0 = (p^5 - 2p^4)y = 0, \quad y(0) = 10,\ \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = 2,\ \dddot{y}(0) = 4,\ \ddddot{y}(0) = 32$$

7ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema abaixo para $x = 0$

$$\dot{v}_1 = -(v_1-2)(v_2+1) + 5x = -v_1v_2 - v_1 + 2v_2 + 2 + 5x$$
$$\dot{v}_2 = (v_2-4)(v_1+5) - 3x^2 = v_1v_2 - 4v_1 + 5v_2 - 20 - 3x^2$$

Pontos de equilíbrio: $(2,4)$, $(-5,-1)$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenha-se $\dot{v} = Av + bx$

$$A = \begin{bmatrix} -(v_2+1) & -(v_1-2) \\ v_2-4 & v_1+5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Analise o comportamento local em cada ponto de equilíbrio

$$(2,4), \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \text{Instável, autovalor com parte real positiva}$$

$$(-5,-1), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Nada se pode afirmar (autovalores puramente imaginários } \pm j\sqrt{35}),$$