1ª Questão: Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ 30 & -7 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine $\rho_0(t)$ e $\rho_1(t)$ tais que

$$\exp(At) = \rho_0(t)\mathrm{I} + \rho_1(t)A$$

b) Determine $v(t)$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5)$$

$$\exp(At) = \rho_0(t)\mathrm{I} + \rho_1(t)A, \quad \rho_0(t) = \frac{5\exp(3t) - 3\exp(5t)}{2}, \quad \rho_1(t) = \frac{\exp(5t) - \exp(3t)}{2}$$

$$v(t) = \exp(At)v(0) = \begin{bmatrix} 6\exp(5t) - 5\exp(3t) & 2\exp(3t) - 2\exp(5t) \\ 15\exp(5t) - 15\exp(3t) & 6\exp(3t) - 5\exp(5t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\exp(5t) - 8\exp(3t) \\ 25\exp(5t) - 24\exp(3t) \end{bmatrix}$$

2ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz A abaixo
b) Determine uma matriz Q tal que $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ a & a+d & d+g \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: a) Determine os valores de β_1 e β_2 para os quais o sistema abaixo deixa de ser controlável.
b) Determine, para cada valor de β_1, β_2 qual autovalor deixa de ser controlável.

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 15 & -4 \\ 30 & -7 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} x$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5)$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Dois autovalores não controláveis}$$

$$\mathrm{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 15\beta_1 - 4\beta_2 \\ \beta_2 & 30\beta_1 - 7\beta_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Não controlável para } \det(\mathrm{Ctrb}(A, b)) = 0$$

$$\det(\mathrm{Ctrb}(A, b)) = 30\beta_1^2 - 22\beta_1\beta_2 + 4\beta_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 2\beta_2/5, \quad \beta_1 = \beta_2/3$$

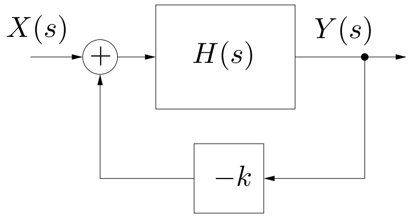
$\beta_1 = 2a, \beta_2 = 5a$, $a \neq 0$: (autovalor 3 deixa de ser controlável)

$$M_3 = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ 30 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 12 & -4 & 2a \\ 30 & -10 & 5a \end{bmatrix} = 1, \qquad M_5 = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 30 & -12 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 10 & -4 & 2a \\ 30 & -12 & 5a \end{bmatrix} = 2$$

$\beta_1 = a$, $\beta_2 = 3a$, $a \neq 0$: (autovalor 5 deixa de ser controlável)

$$M_3 = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ 30 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 12 & -4 & a \\ 30 & -10 & 3a \end{bmatrix} = 2, \qquad M_5 = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 30 & -12 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 10 & -4 & a \\ 30 & -12 & 3a \end{bmatrix} = 1$$

4ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s + 1}{5s^3 + 9s - 1}$$

$$1 < k < 5$$

5ª Questão: Analise a estabilidade assintótica da origem do sistema $\dot{v} = v^3 - av$, $v \in \mathbb{R}$, $a > 0$, a partir da função de Lyapunov $\phi(v) = v^2$, determinando a região Ω correspondente.

$$\phi(v) = v^2 > 0, \forall v \neq 0, \qquad \dot{\phi}(v) = 2v\dot{v} = 2(v^2 - a)v^2 < 0, \forall v \neq 0 \iff -\sqrt{a} < v < \sqrt{a}$$
$$\Omega = \left\{ v \in \mathbb{R} : -\sqrt{a} < v < \sqrt{a} \right\}$$

6ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo abaixo

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -14 & 9 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} v$$

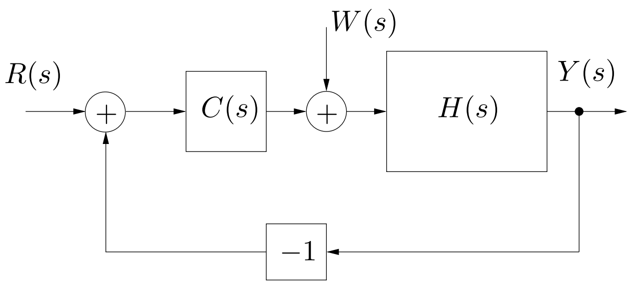
a) O sistema é controlável?
b) Determine, se possível (justificando) um ganho que aloque os autovalores do sistema em malha fechada em -3 e -4 com uma realimentação de estados $x = r - kv$, $k \in \mathbb{R}^{1\times 2}$;
c) Determine, se possível (justificando) um ganho que aloque os autovalores do sistema em malha fechada em -3 e -4 com uma realimentação de saída $x = r - gy$, $g \in \mathbb{R}$.

$$\det(\text{Ctrb}(A, b)) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = 0, \quad \text{(não controlável)}, \qquad \Delta_f(s) = (s+3)(s+4) = s^2 + 7s + 12$$

$$A - bk = \begin{bmatrix} -10 - k_1 & 6 - k_2 \\ -14 - 2k_1 & 9 - 2k_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^2 + (k_1 + 2k_2 + 1)\lambda + (3k_1 + 6k_2 - 6), \quad k = \begin{bmatrix} 6 - 2a & a \end{bmatrix}, a \neq 0$$

$$A - bgc = A - b\begin{bmatrix} g & g \end{bmatrix}, \quad a = g = 2$$

7ª Questão: Considere o sistema linear $H(s)$ e o esquema de realimentação da figura ao lado



$$H(s) = \frac{s + 5}{s - 2}$$

Determine um controlador próprio que aloque os polos do sistema em malha fechada em -1, $-2 + j$, $-2 - j$, ou seja, nas raízes do polinômio $(s+1)(s+2-j)(s+2+j) = s^3 + 5s^2 + 9s + 5$ e garanta rejeição de distúrbios $W(s) = 1/s$ e erro nulo para uma entrada (sinal de referência) degrau.

$$\begin{aligned} F(s) &= (a_1 s + a_0)(s - 2)s + (b_1 s + b_0)(s + 5) \\ &= a_1 s^3 + (a_0 - 2a_1 + b_1)s^2 + (5b_1 + b_0 - 2a_0)s + 5b_0 = s^3 + 5s^2 + 9s + 5 \end{aligned}$$

$$a_1 = 1, b_1 = 22/7, b_0 = 1, a_0 = 27/7, \quad C(s) = \frac{22s/7 + 1}{(s + 27/7)s}$$