1ª Questão: Determine o valor da integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sa}^2(5t)\mathrm{Sa}(3t)dt = \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(5t)\mathrm{Sa}(3t)\}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(5t)\}\right) * \left(\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(5t)\mathrm{Sa}(3t)\}\right)\Big|_{\omega=0}$$

$$\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(5t)\} = \frac{2\pi}{10}\mathrm{Tri}_{20}(\omega), \quad \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}(3t)\} = \frac{2\pi}{6}G_6(\omega)$$

$$I = \frac{\pi}{30}\left(\int_{-3}^{0}(0.1\omega+1)d\omega + \int_{0}^{3}(-0.1\omega+1)d\omega\right) = \frac{\pi}{30}2\left(3-\frac{9}{20}\right) = \frac{51\pi}{300} = \frac{17\pi}{100}$$

2ª Questão: a) Determine o valor máximo do intervalo T entre amostras para que o sinal $x(t)$ seja recuperado sem erro a partir do sinal amostrado $x(kT)$, $x(t) = \cos(20t)\mathrm{Sa}^2(2t)$

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{\cos(20t)\mathrm{Sa}^2(2t)\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\cos(20t)\} * \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(2t)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi\delta(\omega-20)+\pi\delta(\omega+20)\right) * \left(\frac{2\pi}{4}\mathrm{Tri}_8(\omega)\right) = \frac{\pi}{4}\left(\mathrm{Tri}_8(\omega-20)+\mathrm{Tri}_8(\omega+20)\right)$$

Máxima frequência é $\omega_M = 24$ rad/s: $\omega_M = 24 = 2\pi B,\ B = \frac{24}{2\pi}, \quad T < \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{24}$

b) Considere $x(t)$ um sinal limitado em frequência cuja máxima frequência é $\pi/10$ rad/s. Determine a expressão da transformada de Fourier do filtro que recupera o sinal $x(t)$ sem distorção a partir de

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k5)p(t-k5), \quad p(t) = \left(1-t^2\right)G_2(t)$$

$$T = 5,\ \omega_0 = 2\pi/5, \quad H(j\omega) = \frac{5G_{2\pi/5}(\omega)}{P(\omega)}$$

$$P(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}\left(\frac{-2\exp(j\omega)+2\exp(-j\omega)}{j\omega} + 2\exp(j\omega)+2\exp(-j\omega)\right)$$

Ou:

$$\mathcal{F}\{G_2(t)\} = 2\mathrm{Sa}(\omega), \quad \mathcal{F}\{t^2G_2(t)\} = 2(j)^2\frac{d^2}{d\omega^2}\mathrm{Sa}(\omega) = -2\left(-\frac{\mathrm{sen}(\omega)}{\omega} - 2\frac{\cos(\omega)}{\omega^2} + 2\frac{\mathrm{sen}(\omega)}{\omega^3}\right)$$

$$\mathcal{F}\{(1-t^2)G_2(t)\} = \frac{-4\cos(\omega)}{\omega^2} + \frac{4\ \mathrm{sen}(\omega)}{\omega^3}$$

3ª Questão: Determine a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{x(t)\}$ e a região de convergência Ω_x para o sinal (não causal)

$$x(t) = t^3\exp(2t)u(-t)$$

$$y(t) = x(-t) = -t^3\exp(-2t)u(t), \quad Y(s) = \frac{-6}{(s+2)^4},\ \mathrm{Re}(s) > -2$$

$$X(s) = Y(-s) = \frac{-6}{(-s+2)^4} = \frac{-6}{(s-2)^4},\ \mathrm{Re}(-s) > -2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(s) < 2$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -13 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 65 \\ 23 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

a) Determine a função de transferência $H(s) = Y(s)/X(s)$
b) Determine a resposta ao degrau (condições iniciais nulas) $y_u(t)$

$$H(s) = \frac{23s+65}{s^2+6s+13}, \quad Y_u(s) = \frac{23s+65}{s(s^2+6s+13)} = \frac{5}{s} + \frac{4(2)}{(s+3)^2+2^2} - \frac{5(s+3)}{(s+3)^2+2^2}$$

$$y_u(t) = \Big(5 + 4\exp(-3t)\,\operatorname{sen}(2t) - 5\exp(-3t)\cos(2t)\Big)u(t)$$

5ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$(p^2+4)y = 8\cos(2t), \quad p = \frac{d}{dt}, \quad y(0) = 4,\ \dot{y}(0) = 2$$

a) Determine a solução forçada $y_f(t)$
b) Determine a solução
c) Determine uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução do item b)

$$y_f(t) = 2t\,\operatorname{sen}(2t) = \frac{1}{j}t\exp(j2t) - \frac{1}{j}t\exp(-j2t)$$
$$y(t) = 4\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t) + 2t\,\operatorname{sen}(2t)$$
$$(p^2+4)^2 y = 0 = (p^4+8p^2+16)y = 0, \quad y(0) = 4,\ \dot{y}(0) = 2,\ \ddot{y}(0) = -8,\ \dddot{y}(0) = -8$$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema abaixo para $x = 0$

$$\dot{v}_1 = v_1(v_2+5) - 2x^2 = v_1v_2 + 5v_1 - 2x^2$$
$$\dot{v}_2 = (v_1+3)v_2 - x = v_1v_2 + 3v_2 - x$$

$$(0,0),\ (-3,-5)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$A = \begin{bmatrix} v_2+5 & v_1 \\ v_2 & v_1+3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4x \\ -1 \end{bmatrix}$$

c) Analise o comportamento local em cada ponto de equilíbrio

$(0,0),\ A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, Instável, autovalores 3 e 5, $\quad (-3,-5),\ A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$, Instável, autovalores $\pm\sqrt{15}$,