1ª Questão: Considere o sistema discreto definido pela relação entrada-saída

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} k2^k x[n-k]$$

a) Classifique o sistema quanto a: linearidade, BIBO estabilidade, e causalidade, justificando a resposta.
b) Determine a resposta à entrada $x[n] = 2^n u[n]$

Computando a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema

$$h[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} k2^k \delta[n-k] = n2^n u[n]$$

verifica-se que

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k2^k u[k] x[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} k2^k x[n-k]$$

e portanto trata-se de sistema linear e invariante no tempo. Não é BIBO-estável (a resposta ao impulso não é absolutamente somável) e é causal ($h[n] = 0$ para $n < 0$). Para a entrada $x[n] = 2^n u[n]$ tem-se

$$y[n] = h[n]*x[n] = (n2^n u[n])*(2^n u[n]) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k2^k u[k] 2^{n-k} u[n-k] = u[n]2^n \Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big) = \frac{n(n+1)}{2} 2^n u[n]$$

2ª Questão: Para a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{12z^3 - 8z^2 - z}{(z-1)(4z^2-1)}, \quad |z| > 1$$

determine: a) $x[0]$ b) $x[1]$ c) $x[+\infty]$ d) $\sum_{k=0}^{+\infty} x[k]$

$$x[0] = 3, \quad x[1] = 1, \quad x[+\infty] = 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] \to +\infty$$

3ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{5z - 2z^2}{(z-2)(z-4)}, \quad |z| < 2$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X} = 0\}$ b) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$ c) A média da variável $\mathbb{X}$, isto é, $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

$$\Pr\{\mathbb{X} = 0\} = 0, \quad \Pr\{\mathbb{X} = 1\} = \frac{5}{8}, \quad \mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

4ª Questão: Determine, para a equação a diferenças dada por

$$y[n+2] - 7y[n+1] + 12y[n] = 0, \quad y[0] = 7, \ y[1] = 24$$

a) $Y(z)$ (considerando que a equação foi multiplicada dos dois lados pelo degrau unitário $u[n]$)

$$Y(z) = \frac{7z^2 - 25z}{z^2 - 7z + 12} = \frac{7z^2 - 25z}{(z-3)(z-4)} = 4\frac{z}{z-3} + 3\frac{z}{z-4}$$

b) A solução $y[n]$: $y[n] = (4(3)^n + 3(4)^n)u[n]$
c) A solução forçada $y_f[n]$ da equação considerando uma entrada $x[n] = 3^{n+2}$: $y_f[n] = -3n3^n$
d) A solução da equação considerando a entrada $x[n] = 3^{n+2}$ e as condições iniciais $y[0] = 7$, $y[1] = 24$

$$y[n] = a3^n + b4^n - 3n3^n, \quad y[n] = -5(3)^n + 12(4)^n - 3n(3)^n$$

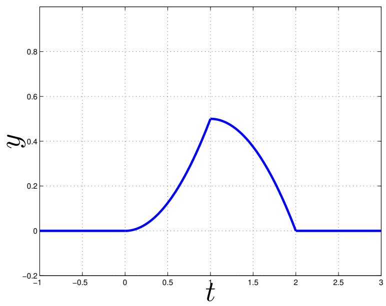
5ª Questão: Considere o sistema descrito pela relação entrada-saída

$$y(t) = \int_0^1 \beta x(t-\beta)d\beta$$

a) Determine a resposta ao impulso $h(t)$ do sistema: $h(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big) = tG_1(t-0.5)$
b) Classifique o sistema quanto à linearidade, variante ou invariante no tempo, causalidade e BIBO estabilidade
Como $y(t) = h(t) * x(t)$, tem-se: Sistema linear invariante no tempo, BIBO estável ($h(t)$ é absolutamente integrável) e causal ($h(t) = 0$, $t < 0$)
c) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada $x(t) = G_1(t-0.5)$

$$y(t) = \mathcal{I}_h(t) - \mathcal{I}_h(t-1), \quad \mathcal{I}_h(t) = \frac{t^2}{2}G_1(t-0.5) + \frac{1}{2}u(t-1)$$

$$y(t) = \frac{t^2}{2}G_1(t-0.5) + \frac{1}{2}u(t-1) - \frac{(t-1)^2}{2}G_1(t-1.5) - \frac{1}{2}u(t-2)$$



6ª Questão: Determine e esboce funções $\{g_1(t), g_2(t), g_3(t)\}$ ortogonais que gerem o mesmo espaço que as funções

$$f_1(t) = G_2(t-1) \quad , \quad f_2(t) = G_2(t-2) \quad , \quad f_3(t) = G_2(t-3)$$

$$g_1(t) = f_1(t) \ , \ g_2(t) = f_2(t) - \frac{1}{2}g_1(t) = -\frac{1}{2}G_1(t-0.5) + \frac{1}{2}G_1(t-1.5) + G_1(t-2.5)$$

$$g_3(t) = f_3(t) - 0g_1(t) - \frac{1}{(3/2)}g_2 = f_3(t) - \frac{2}{3}g_2(t) = \frac{1}{3}G_1(t-0.5) - \frac{1}{3}G_1(t-1.5) + \frac{1}{3}G_1(t-2.5) + G_1(t-3.5)$$

7ª Questão: a) Determine os coeficientes c_k da série exponencial de Fourier de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t-k10) \quad , \quad p(t) = -tG_1(t+0.5) - G_1(t-0.5)$$

b) Calcule c_0: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5}, \quad c_0 = \dfrac{-1}{20} = -0.05$

$$c_k = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{jk2\pi/10}\left(\frac{1-\exp(jk2\pi/10)}{jk2\pi/10} + \exp(jk2\pi/10) - 1 + \exp(-jk2\pi/10)\right)\right)$$

c) Determine a potência média do sinal

$$\frac{1}{10}\left(\int_{-1}^0 t^2dt + \int_0^1 dt\right) = \frac{1}{10}\left(\left(\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^0 + t\Big|_0^1\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}+1\right) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$