

# IA888 - Análise de Sinais e de Sistemas Lineares

## Material Complementar

Prof. Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas

# Representação por variáveis de estado de um sistema MIMO

## Variáveis de estado

Sistemas MIMO podem ser descritos por equações de primeira ordem nas variáveis de estado. Assim

$$\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t) \quad , \quad y(t) = g(v(t), x(t), t) \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \quad , \quad x \in \mathbb{R}^p \quad , \quad y \in \mathbb{R}^q$$

As trajetórias  $v(t)$ , soluções da equação dinâmica, são unicamente determinadas a partir da condição inicial  $v(0)$  e da entrada  $x(t)$ .

O sistema MIMO linear invariante no tempo é descrito pelas matrizes reais  $(A, B, C, D)$  e pelas equações de estado e de saída

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad y = Cv + Dx \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \quad , \quad x \in \mathbb{R}^p \quad , \quad y \in \mathbb{R}^q \quad (1)$$

## Representação por variáveis de estado de um sistema MIMO

### Circuito de segunda ordem

As equações de estado para o circuito da Figura 1, na forma

$$\dot{v} = Av + Bx ; y = Cv + Dx \quad ; \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

sendo  $v_1$  a tensão no capacitor e  $v_2$  a corrente no indutor. A saída  $y_1$  é a corrente no resistor e a saída  $y_2$  é a corrente no indutor;  $x_1(t)$  é uma fonte de corrente e  $x_2(t)$  é uma fonte de tensão, são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -1/RC & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

## Representação por variáveis de estado de um sistema MIMO

### Circuito de segunda ordem (cont.)

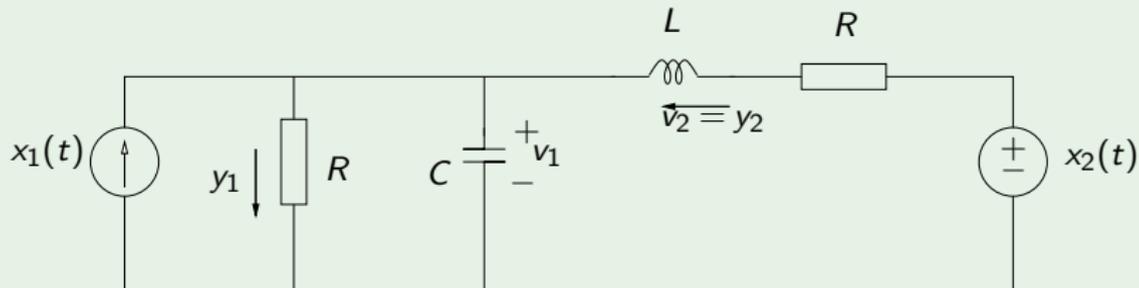


Figura : Circuito de segunda ordem excitado por fontes de tensão e de corrente.

# Sistema MIMO

## Matriz resposta ao impulso de um sistema MIMO

A matriz resposta ao impulso de um sistema MIMO linear invariante no tempo é a matriz formada pelas funções  $h_{ij}(t)$ , sendo  $h_{ij}(t)$  a resposta na saída  $i$  ao impulso aplicado na entrada  $j$  com as demais entradas zeradas.

A resposta ao impulso de sistemas descritos por equações diferenciais pressupõe condições iniciais nulas.

## Matriz de transferência de um sistema MIMO

A matriz de transferência de um sistema MIMO linear invariante no tempo é a matriz formada pelas transformadas de Laplace das respostas ao impulso  $h_{ij}(t)$ .

# Sistema MIMO

## Função de transferência

A matriz de transferência do sistema (1) é dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\det(sI - A)} C \text{Adj}(sI - A)B + D$$

Observe que nem todo autovalor de  $A$  é pólo de  $H(s)$ , pois pode haver cancelamentos. A matriz resposta ao impulso do sistema (causal) é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = C \exp(At)B + D\delta(t)$$

# Sistema MIMO

## Função de transferência de segunda ordem

A matriz de transferência do Exemplo 3, com  $R = L = C = 1$ ,

$$\dot{v} = Av + Bx, \quad y = Cv + Dx, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

é dada por

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

com pólos  $-1 \pm j$ . A matriz de respostas ao impulso é dada por  $[h_{ij}(t)]$  com

$$h_{11}(t) = h_{22}(t) = \exp(-t) \cos(t) u(t), \quad h_{12}(t) = -h_{21}(t) = \exp(-t) \sin(t) u(t)$$

# Controlabilidade

## Controlabilidade

O sistema descrito pela equação de estado

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \quad , \quad x \in \mathbb{R}^p$$

é controlável (ou o par  $(A, B)$  é controlável) se para qualquer estado inicial  $v(0)$  existir uma entrada  $x(t)$ ,  $t \in [0, \tau]$ , que leva o estado de  $v(0)$  para qualquer  $v(\tau)$ .

A definição requer apenas que se possa mover qualquer estado inicial no espaço de estados para qualquer estado final em tempo finito (dado). Não há restrições quanto à trajetória a ser seguida nem quanto à magnitude da entrada. Note que a equação de saída não influencia a controlabilidade.

# Controlabilidade

## Controlabilidade

As condições a seguir são equivalentes.

- O par  $(A, B)$  é controlável.
- A matriz  $W_c(t)$  é não-singular  $\forall t > 0$ , com

$$W_c(t) = \int_0^t \exp(A\beta) B B' \exp(A'\beta) d\beta$$

- A matriz de controlabilidade  $\text{Ctrb}(A, B)$  tem *rank*  $n$  (i.e. *rank* completo de linhas)

$$\text{Ctrb}(A, B) = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times np}$$

- Para todo  $\lambda \in \lambda(A)$  (e, portanto, para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ ), a matriz

$$[(A - \lambda I) \quad B] \in \mathbb{C}^{n \times (n+p)}$$

tem *rank*  $n$  (isto é, *rank* completo de linhas).

## Controlabilidade I

Note que (basta fazer a mudança de variáveis  $\beta = t - \xi$ )

$$W_c(t) = \int_0^t \exp(A\beta)BB' \exp(A'\beta)d\beta = \int_0^t \exp(A(t-\xi))BB' \exp(A'(t-\xi))d\xi$$

e que o integrando garante que a matriz é sempre semidefinida positiva. A matriz  $W_c(t)$  será definida positiva se e somente se for não singular.

Para provar que, se  $W_c(t)$  for não singular, então  $(A, B)$  é controlável, tem-se que a resposta em termos do estado  $v(t)$  no instante  $t = t_1$  é dada por

$$v(t_1) = \exp(At_1)v(0) + \int_0^{t_1} \exp(A(t_1 - \beta))Bx(\beta)d\beta$$

Para qualquer  $v(0) = v_0$  e qualquer  $v(t_1) = v_1$ , a entrada

$$x(t) = -B' \exp(A'(t_1 - t))W_c^{-1}(t_1)(\exp(At_1)v_0 - v_1)$$

leva o estado de  $v_0$  a  $v_1$  no tempo  $t_1$ . De fato, substituindo

## Controlabilidade II

$$\begin{aligned}
 v(t_1) &= \exp(At_1)v(0) \\
 &\quad - \left( \int_0^{t_1} \exp(A(t_1 - \beta))BB' \exp(A'(t_1 - \beta))d\beta \right) W_c^{-1}(t_1) (\exp(At_1)v_0 - v_1) \\
 &= \exp(At_1)v(0) - W_c(t_1)W_c^{-1}(t_1) (\exp(At_1)v_0 - v_1) = v_1
 \end{aligned}$$

Como conclusão, se  $W_c(t)$  é não singular então  $(A, B)$  é controlável.

Para mostrar o inverso, supõe-se por absurdo que o par é controlável mas  $W_c(t_1)$  não é definida positiva para algum  $t_1$ . Nesse caso, existe  $v \neq 0$  tal que

$$\begin{aligned}
 v'W_c(t_1)v &= \int_0^{t_1} v' \exp(A(t_1 - \beta))BB' \exp(A'(t_1 - \beta))v d\beta \\
 &= \int_0^{t_1} \|B' \exp(A'(t_1 - \beta))v\|^2 d\beta = 0
 \end{aligned}$$

## Controlabilidade III

o que implica

$$B' \exp(A'(t_1 - \beta))v = 0, \quad v' \exp(A(t_1 - \beta))B = 0$$

para todo  $\beta \in [0, t_1]$ . Por outro lado, se o sistema é controlável, existe uma entrada que transfere o estado inicial de  $v(0) = \exp(-At_1)v$  para  $v(t_1) = 0$ . Utilizando a expressão geral de  $v(t)$  para esse caso tem-se

$$v(t_1) = 0 = v + \int_0^{t_1} \exp(A(t_1 - \beta))Bx(\beta)d\beta$$

Pré-multiplicando por  $v'$

$$0 = v'v + \int_0^{t_1} v' \exp(A(t_1 - \beta))Bx(\beta)d\beta = \|v\|^2 + 0$$

o que contradiz a hipótese de que  $v \neq 0$ .

# Lyapunov e controlabilidade

## Lyapunov e controlabilidade

Considere  $A$  tal que todos os seus autovalores têm parte real negativa. Então, a equação

$$AP + PA' = -BB'$$

tem solução  $P$  única definida positiva se e somente se o par  $(A, B)$  for controlável. Além disso, a solução (chamada gramiano de controlabilidade) pode ser expressa como

$$W_c = \int_0^{+\infty} \exp(A\beta)BB' \exp(A'\beta) d\beta$$

# Lyapunov e controlabilidade

## MIMO não controlável

O sistema

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

possui  $A$  com autovalores  $-1$  e  $-2$ . A solução da equação de Lyapunov é dada por

$$AP + PA' = -BB' = -\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que é semi-definida positiva (menores principais líderes  $0.5$  e  $0$ ). Portanto, o sistema é não controlável. De fato, a matriz de controlabilidade é tal que

$$\text{Ctrb}(A, B) = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\text{Ctrb}(A, B)) = 1$$

# Controlabilidade e Forma de Jordan MIMO

## Controlabilidade e Forma de Jordan MIMO

Um sistema MIMO é controlável se, para cada autovalor distinto, os vetores linha da matriz  $B$  correspondentes à última linha de cada bloco de Jordan associado a esse autovalor forem linearmente independentes.

## Controlabilidade e Forma de Jordan MIMO

$$\dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} + \hat{B}x = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \hat{v} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

As linhas de  $B$  correspondentes às últimas linhas dos blocos de Jordan associados a  $\lambda_1$  são linearmente independentes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A última linha de  $B$  associada a  $\lambda_2$  é linearmente independente.

$$[1 \quad 1 \quad 1]$$

Portanto, o par  $(\hat{A}, \hat{B})$  é controlável.

# Observabilidade

## Observabilidade

O sistema descrito pelas equações

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = Cv \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \quad , \quad y \in \mathbb{R}^q$$

é observável (ou o par  $(A, C)$  é observável) se existir  $\tau > 0$  tal que o conhecimento da saída  $y(t)$  para todo  $t \in [0, \tau]$  é suficiente para determinar a condição inicial  $v(0)$ .

Note que a entrada  $x$  não influencia a observabilidade.

# Observabilidade

## Observabilidade

As condições a seguir são equivalentes.

- O par  $(A, C)$  é observável.
- A matriz  $W_o(t)$  é não-singular  $\forall t > 0$ , com

$$W_o(t) = \int_0^t \exp(A'\beta) C' C \exp(A\beta) d\beta$$

- A matriz de observabilidade  $\text{Obsv}(A, C)$  tem *rank*  $n$  (i.e. *rank* completo de colunas)

$$\text{Obsv}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{qn \times n}$$

# Observabilidade

## Observabilidade (cont.)

- Para todo  $\lambda \in \lambda(A)$  (e, portanto, para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ ), a matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+q) \times n}$$

tem *rank*  $n$  (isto é, *rank* completo de colunas).

# Lyapunov e observabilidade

## Lyapunov e observabilidade

Considere  $A$  tal que todos os seus autovalores têm parte real negativa. Então, a equação

$$A'P + PA = -C'C$$

tem solução  $P$  única definida positiva se e somente se o par  $(A, C)$  for observável. Além disso, a solução (chamada gramiano de observabilidade) pode ser expressa como

$$W_o = \int_0^{+\infty} \exp(A'\beta) C' C \exp(A\beta) d\beta$$

## Lyapunov e observabilidade

### MIMO não observável

O sistema

$$\dot{v} = Ax \quad , \quad y = Cv \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

possui  $A$  com autovalores  $-1$  e  $-2$ . A solução da equação de Lyapunov é dada por

$$A'P + PA = -C'C = -\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que é semi-definida positiva (menores principais líderes  $0.5$  e  $0$ ). Portanto, o sistema é não observável. De fato, a matriz de observabilidade é tal que

$$\text{Obsv}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\text{Obsv}(A, C)) = 1$$

## Observabilidade e Forma de Jordan MIMO

### Observabilidade e Forma de Jordan MIMO

Um sistema MIMO é observável se, para cada autovalor distinto, os vetores coluna da matriz  $C$  correspondentes à primeira coluna de cada bloco de Jordan associado a esse autovalor forem linearmente independentes.

### Observabilidade e Forma de Jordan MIMO

$$\dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \hat{v}, y = \hat{C}\hat{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}$$

# Observabilidade e Forma de Jordan MIMO

## Observabilidade e Forma de Jordan MIMO

As colunas de  $C$  associadas às primeiras colunas dos blocos de Jordan associados a  $\lambda_1$  são linearmente independentes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A primeira coluna de  $C$  associada a  $\lambda_2$  é nula

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o par  $(\hat{A}, \hat{C})$  é não observável.

# Estabilidade

Um sistema MIMO (*Multiple-Inputs Multiple-Outputs*) é BIBO (*Bounded-Input Bounded-Output*) estável se entradas limitadas produzem saídas limitadas.

Um sistema MIMO linear invariante no tempo é BIBO estável se e somente todo  $h_{ij}(t)$  (resposta ao impulso) for absolutamente integrável.

Um sistema MIMO linear invariante no tempo é BIBO estável se e somente todos os pólos da matriz de transferência possuírem parte real estritamente negativa.

# Estabilidade

## Estabilidade e controlabilidade

Para qualquer matriz  $B$  tal que

$$\text{rank}(\text{Ctrb}(A, B)) = \text{rank}([B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]) = n$$

a solução da equação de Lyapunov

$$AP + PA' = -BB'$$

é única, simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz  $A$  tiverem parte real negativa.

# Estabilidade

## Estabilidade e observabilidade

Para qualquer matriz  $C$  tal que

$$\text{rank}(\text{Obsv}(A, C)) = \text{rank} \left( \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n$$

a solução da equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -C'C$$

é única, simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz  $A$  tiverem parte real negativa.

## Estabilidade e observabilidade I

Prova:

Primeiramente, mostra-se que se  $A$  possui autovalores com parte real negativa e o par  $(A, C)$  é observável, então a solução é única, simétrica e definida positiva.

- A solução  $P$  é única (autovalores de  $A$  são tais que  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ ).
- A solução pode ser expressa como

$$P = \int_0^{\infty} \exp(A' t) C' C \exp(At) dt$$

- Como  $C' C$  é simétrica,  $P$  também o é.
- Note que  $C' C$  é semi-definida positiva.

Para  $v \neq 0$ , tem-se

$$v' P v = \int_0^{+\infty} v' \exp(A' t) C' C \exp(At) v dt = \int_0^{+\infty} \|C \exp(At) v\|^2 dt \geq 0$$

## Estabilidade e observabilidade II

e portanto  $P$  é pelo menos semi-definida positiva. Por absurdo, suponha que  $P$  não é definida positiva, isto é, existe  $v \neq 0$  tal que

$$v' P v = 0 \quad \Rightarrow \quad C \exp(At) v = 0 \quad \forall t$$

Derivando  $n-1$  vezes em relação ao tempo, tem-se

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \exp(At) v = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank}(\text{Obsv}(A, C)) < n$$

o que contraria a hipótese de que o par  $(A, C)$  é observável. Portanto,  $P$  é definida positiva.

Agora, prova-se que se  $P = P' > 0$ , então  $A$  possui todos os autovalores com parte real negativa.

Pré multiplicando a equação de Lyapunov por  $(v^*)'$  e pós multiplicando por  $v$ , com  $v$  autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ , tem-se

## Estabilidade e observabilidade III

$$(v^*)'A'Pv + (v^*)'PAv = (\lambda^* + \lambda)(v^*)'Pv = 2\text{Re}(\lambda)(v^*)'Pv = -(v^*)'C' Cv = -\|Cv\|_2^2$$

Como  $(v^*)'Pv$  é positivo, basta provar que o vetor  $Cv$  é não nulo. De fato, como

$$\text{Obsv}(A, C)v = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} Cv \\ \lambda Cv \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} Cv \end{bmatrix}$$

o *rank* completo da matriz de observabilidade garante que  $Cv \neq 0$ .

## Estabilidade e controlabilidade

O sistema

$$\dot{v} = Av + Bx, \quad y = Cv, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

é tal que

$$\text{rank}(\text{Ctrb}(A, B)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & -5 \end{bmatrix} = 2$$

A solução da equação de Lyapunov é dada por

$$AP + PA' = -BB' = - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

que é definida positiva, pois os menores principais líderes são positivos (3 e 2), portanto o sistema é assintoticamente estável. De fato, os autovalores de  $A$  são  $-1$  e  $-2$ .

## Estabilidade e observabilidade

A solução da equação de Lyapunov é dada por

$$A'P + PA = -C'C = - \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 2.5 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 5 & 2.5 \\ 2.5 & 1.25 \end{bmatrix}$$

que é semi definida positiva, pois os menores principais líderes são (5 e 0). Nesse caso o par  $(A, C)$  é não observável, pois

$$\text{Obsv}(A, C) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 3 & 1.5 \\ -1 & -0.5 \\ -3 & -1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\text{Obsv}(A, C)) = 1$$

e, dessa forma, o teste falha para decidir se o sistema é assintoticamente estável ou não.

## Realimentação de Estados — Sistemas SISO

Considere o sistema linear de dimensão  $n$  sem transmissão direta (i.e.  $d = 0$ )

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Av + bx \\ y &= cv\end{aligned}$$

Na realimentação de estados, a entrada  $x$  é dada por

$$x = r - kv = r - [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] v$$

sendo  $r$  um sinal de referência, resultando em

$$\dot{v} = (A - bk)v + br$$

O par  $(A - bk, b)$  é controlável para qualquer vetor  $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  se e somente se o par  $(A, b)$  também for controlável.

Prova:

Considere  $n = 4$  e as matrizes de controlabilidade

$$\text{Ctrb}(A, b) = [ b \quad Ab \quad A^2b \quad A^3b ]$$

$$\text{Ctrb}(A - bk, b) = [ b \quad (A - bk)b \quad (A - bk)^2b \quad (A - bk)^3b ]$$

Note que

$$\text{Ctrb}(A - bk, b) = \text{Ctrb}(A, b) \begin{bmatrix} 1 & -kb & -k(A - bk)b & -k(A - bk)^2b \\ 0 & 1 & -kb & -k(A - bk)b \\ 0 & 0 & 1 & -kb \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz à direita é não singular para qualquer  $k$ . Portanto, o *rank* de  $\text{Ctrb}(A - bk, b)$  é igual ao de  $\text{Ctrb}(A, b)$ .

Esse resultado também pode ser demonstrado pela definição de controlabilidade. Considere  $v_0$  e  $v_1$  arbitrários. Se o sistema original é controlável, existe  $x_1$  que leva de  $v_0$  a  $v_1$  em tempo finito. A entrada  $r_1 = x_1 + kv$ , leva o sistema controlado de  $v_0$  a  $v_1$ .

Note também que  $r$  não controla o estado diretamente;  $r$  gera a entrada  $x$  que é usada para controlar  $v$ . Portanto, se  $x$  não controla o estado  $v$ ,  $r$  também não controla.

Note que a controlabilidade é invariante sob qualquer realimentação de estados, porém a observabilidade pode ser afetada.

Exemplo: Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} v$$

que é controlável e observável em malha aberta, pois as matrizes

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

possuem *rank* igual a 2. Definindo a realimentação de estados

$$x = r - \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} v$$

tem-se o sistema de malha fechada

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

com as matrizes de controlabilidade e observabilidade dadas por

$$\text{Ctrb}(A - bk, b) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} = 2, \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{rank} = 1$$

e portanto o sistema em malha fechada é não observável.

## Exemplo

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x, \quad x = r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} v$$

cujo polinômio característico é dado por

$$\Delta(s) = (s-4)(s+2)$$

Com a realimentação de estados, tem-se o sistema em malha fechada

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1-k_1 & 3-k_2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

e o polinômio característico

$$\Delta_f(s) = s^2 + (k_1 - 2)s + (3k_2 - k_1 - 8)$$

A escolha de  $k_1$  e  $k_2$  permite alocar arbitrariamente os autovalores do sistema em malha fechada.

Considere o sistema de dimensão  $n = 4$

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Av + bx \\ y &= cv\end{aligned}$$

cujo polinômio característico é dado por

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Se o sistema é controlável, então existe uma transformação  $v = T\hat{v}$  com

$$T = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que leva o sistema à forma canônica controlável

$$\dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} + \hat{b}x = \begin{bmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \hat{c}\hat{v} = [ \beta_3 \quad \beta_2 \quad \beta_1 \quad \beta_0 ] \hat{v}$$

Além disso, a função de transferência do sistema é dada por

$$H(s) = \frac{\beta_3 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Prova:

Considere  $\text{Ctrb}(A, b)$  a matriz de controlabilidade do sistema original e  $\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})$  a do sistema transformado, com  $\hat{A} = T^{-1}AT$ ,  $\hat{b} = T^{-1}b$ .

A controlabilidade é invariante com a transformação de similaridade e, para um sistema controlável, tem-se

$$\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) = T^{-1}\text{Ctrb}(A, b) \Rightarrow T = \text{Ctrb}(A, b)\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})^{-1}$$

A matriz de controlabilidade do sistema transformado é dada por

$$\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_3 & \alpha_3^2 - \alpha_2 & -\alpha_3^3 + 2\alpha_3\alpha_2 - \alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 & \alpha_3^2 - \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é

$$\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como conclusão,  $T = \text{Ctrb}(A, b)\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})^{-1}$  é a matriz de transformação de similaridade.

Note que a função de transferência do sistema transformado é dada por

$$H(s) = \hat{c}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{b} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^3 \\ s^2 \\ s \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(s) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

que, por sua vez, é também a função de transferência do sistema original.

Se o sistema

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Av + bx \\ y &= cv\end{aligned}$$

é controlável, então com a realimentação de estados  $x = r - kv$  pode-se alocar arbitrariamente os autovalores de  $A - bk$  (desde que autovalores complexos apareçam em pares complexo conjugados).

Prova:

Considere  $n = 4$ . Se o sistema é controlável, então pode ser colocado na forma canônica

$$\begin{aligned}\dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} + \hat{b}x &= \begin{bmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x \\ y = \hat{c}\hat{v} &= [ \beta_3 \quad \beta_2 \quad \beta_1 \quad \beta_0 ] \hat{v}\end{aligned}$$

com  $\hat{A} = T^{-1}AT$  e  $\hat{b} = T^{-1}b$ . Substituindo  $v = T\hat{v}$  na lei de controle, tem-se

$$x = r - kv = r - kT\hat{v} = r - \hat{k}\hat{v}, \quad \hat{k} = kT$$

Como  $\hat{A} - \hat{b}\hat{k} = T^{-1}(A - bk)T$ , as matrizes  $(A - bk)$  e  $(\hat{A} - \hat{b}\hat{k})$  são similares (têm os mesmos autovalores).

Especificados os autovalores do sistema em malha fechada, pode-se formar o polinômio característico do sistema em malha fechada

$$\Delta_f(s) = s^4 + \bar{\alpha}_3 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_1 s + \bar{\alpha}_0$$

Se  $\hat{k}$  é escolhido

$$\hat{k} = [ \bar{\alpha}_3 - \alpha_3 \quad \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \quad \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \quad \bar{\alpha}_0 - \alpha_0 ]$$

a equação dinâmica em malha fechada fica

$$\dot{\hat{v}} = (\hat{A} - \hat{b}\hat{k})\hat{x} + \hat{b}r = \begin{bmatrix} -\bar{\alpha}_3 & -\bar{\alpha}_2 & -\bar{\alpha}_1 & -\bar{\alpha}_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

e o polinômio característico de  $(A - bk)$  (que é igual ao de  $(\hat{A} - \hat{b}\hat{k})$ ) é dado por  $\Delta_f(s)$ .

O ganho de realimentação de estados  $k$  que faz a alocação desejada pode ser computado

$$k = \hat{k} T^{-1} = \hat{k} \text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) \text{Ctrb}(A, b)^{-1}$$

## Exemplo I

Considere o modelo linearizado de um pêndulo invertido

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} x$$

$$y = [ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] v$$

Trata-se de um sistema controlável, cujo polinômio característico é

$$\Delta(s) = s^2(s^2 - 5) = s^4 + 0s^3 - 5s^2 + 0s + 0$$

Construindo a transformação de similaridade que coloca o sistema na forma canônica controlável

$$T = \text{Ctrb}(A, b) \text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})^{-1}$$

com

$$\text{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplo II

tem-se

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A alocação desejada  $(-1.5 \pm 0.5j, -1 \pm j)$  produz o polinômio característico em malha fechada

$$\Delta_f(s) = (s + 1.5 - 0.5j)(s + 1.5 + 0.5j)(s + 1 - j)(s + 1 + j) = s^4 + 5s^3 + 10.5s^2 + 11s + 5$$

e o ganho  $\hat{k}$  é dado por

$$\hat{k} = [ (5 - 0) \quad (10.5 + 5) \quad (11 - 0) \quad (5 - 0) ] = [ 5 \quad 15.5 \quad 11 \quad 5 ]$$

implicando em

$$k = \hat{k}T^{-1} = [ -5/3 \quad -11/3 \quad -103/12 \quad -13/3 ]$$

## Fórmula de Ackermann I

Considere o sistema de dimensão  $n$

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$y = cv$$

O ganho  $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  da lei de controle  $x = r - kv$  que aloca os autovalores de  $A - bk$  nas raízes do polinômio  $\Delta_f(s)$  é dado por

$$k = e'_n \text{Ctrb}(A, b)^{-1} \Delta_f(A) \quad , \quad e'_n = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]$$

Prova:

Considere  $n = 4$ , a matriz de controlabilidade do sistema original

$$\text{Ctrb}(A, b) = [ \quad b \quad Ab \quad A^2b \quad A^3b \quad ]$$

e o sistema transformado  $v = T\hat{v}$  com

$$T = \text{Ctrb}(A, b) \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Fórmula de Ackermann II

que possui a forma canônica controlável

$$\dot{\hat{v}} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = [ \beta_3 \quad \beta_2 \quad \beta_1 \quad \beta_0 ] \hat{v}$$

A relação entre a matriz de controlabilidade do sistema original e a do transformado é dada por

$$\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) = T^{-1} \text{Ctrb}(A, b) \quad , \quad T = \text{Ctrb}(A, b) \text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})^{-1}$$

com

$$\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_3 & \alpha_3^2 - \alpha_2 & -\alpha_3^3 + 2\alpha_3\alpha_2 - \alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 & \alpha_3^2 - \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No caso geral, a última linha da matriz  $\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})$  tem a forma

$$e'_n = [ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1 ]$$

## Fórmula de Ackermann III

Para a alocação desejada, define-se o polinômio característico do sistema em malha fechada

$$\Delta_f(s) = s^4 + \bar{\alpha}_3 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_1 s + \bar{\alpha}_0$$

que deve ser igualado com

$$\det(sI - \hat{A} + \hat{b}\hat{k}) = s^4 + (\alpha_3 + \hat{k}_1)s^3 + (\alpha_2 + \hat{k}_2)s^2 + (\alpha_1 + \hat{k}_3)s + (\alpha_0 + \hat{k}_4)$$

e, portanto,

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_3 - \alpha_3 & \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 & \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 & \bar{\alpha}_0 - \alpha_0 \end{bmatrix}$$

Como, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, toda matriz dinâmica satisfaz sua equação característica, tem-se

$$\hat{A}^n + \alpha_{n-1}\hat{A}^{n-1} + \alpha_{n-2}\hat{A}^{n-2} + \dots + \alpha_1\hat{A} + \alpha_0I = 0$$

Utilizando os coeficientes do polinômio de malha fechada, pode-se formar o polinômio

$$\Delta_f(\hat{A}) = \hat{A}^n + \bar{\alpha}_{n-1}\hat{A}^{n-1} + \bar{\alpha}_{n-2}\hat{A}^{n-2} + \dots + \bar{\alpha}_0I$$

Substituindo-se  $\hat{A}^n$  obtido a partir da equação característica, tem-se

## Fórmula de Ackermann IV

$$\Delta_f(\hat{A}) = (\bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1})\hat{A}^{n-1} + (\bar{\alpha}_{n-2} - \alpha_{n-2})\hat{A}^{n-2} + \dots + (\bar{\alpha}_0 - \alpha_0)I$$

Levando em conta a estrutura particular de  $\hat{A}$ , observa-se que

$$e'_n \hat{A} = [ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 ] = e'_{n-1}$$

e conseqüentemente

$$(e'_n \hat{A}) \hat{A} = e'_n \hat{A}^2 = [ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 ] \hat{A} = [ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 ] = e'_{n-2}$$

implicando

$$e'_n \hat{A}^{n-1} = [ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 ] = e'_1$$

Portanto, multiplicando  $\Delta_f(\hat{A})$  por  $e'_n$ , tem-se

$$\begin{aligned} e'_n \Delta_f(\hat{A}) &= (\bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1})e'_1 + (\bar{\alpha}_{n-2} - \alpha_{n-2})e'_2 + \dots + (\bar{\alpha}_0 - \alpha_0)e'_n \\ &= \hat{k}_1 e'_1 + \hat{k}_2 e'_2 + \dots + \hat{k}_n e'_n = [ \hat{k}_1 \ \hat{k}_2 \ \dots \ \hat{k}_n ] = \hat{k} \end{aligned}$$

## Fórmula de Ackermann V

Como  $k = \hat{k}T^{-1}$  e  $T^{-1} = \text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})\text{Ctrb}(A, b)^{-1}$ , tem-se

$$\begin{aligned}k &= e'_n \Delta_f(\hat{A}) T^{-1} = e'_n \Delta_f(T^{-1}AT) T^{-1} \\ &= e'_n T^{-1} \Delta_f(A) = e'_n \text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) \text{Ctrb}(A, b)^{-1} \Delta_f(A)\end{aligned}$$

ou, como  $e'_n \text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) = e'_n$ , chega-se a

$$k = e'_n \text{Ctrb}(A, b)^{-1} \Delta_f(A)$$

## Cômputo do ganho $k$ pela equação de Lyapunov I

Considere o sistema de dimensão  $n$

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad x = r - kv$$

Se o par  $(A, b)$  for controlável, a determinação de um ganho  $k$  tal que  $(A - bk)$  tenha os autovalores desejados (desde que não coincidam com nenhum dos autovalores de  $A$ ) pode ser feita a partir da equação de Lyapunov:

- 1 Escolha uma matriz  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com os autovalores desejados;
- 2 Escolha  $\hat{k}$  arbitrário tal que  $(F, \hat{k})$  seja observável;
- 3 Obtenha a solução única  $T$  da equação de Lyapunov

$$AT - TF = b\hat{k}$$

- 4 O ganho  $k$  é dado por

$$k = \hat{k}T^{-1}$$

## Cômputo do ganho $k$ pela equação de Lyapunov II

Prova:

Para  $T$  não singular,  $\hat{k} = kT$  e  $AT - TF = b\hat{k}$  implicam

$$(A - bk)T = TF \quad \Leftrightarrow \quad (A - bk) = TFT^{-1}$$

e portanto  $(A - bk)$  e  $F$  são similares (mesmos autovalores). Se  $A$  e  $F$  não têm autovalores comuns, existe uma única solução  $T$  para qualquer  $\hat{k}$ . Caso  $A$  e  $F$  tenham algum autovalor comum, a solução  $T$  pode existir ou não (depende de  $b\hat{k}$ ).

Se  $A$  e  $F$  não têm autovalores em comum, então a única solução de  $AT - TF = b\hat{k}$  é não-singular se e somente se  $(A, b)$  é controlável e  $(F, \hat{k})$  é observável.

Para verificar essa afirmação, considere  $n = 4$  e o polinômio característico de  $A$  dado por

$$\Delta(s) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se

$$\Delta(A) = A^4 + \alpha_3 A^3 + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

Considere agora o polinômio matricial  $\Delta(F)$

$$\Delta(F) = F^4 + \alpha_3 F^3 + \alpha_2 F^2 + \alpha_1 F + \alpha_0 I$$

## Cômputo do ganho $k$ pela equação de Lyapunov III

e note que, se  $\hat{\lambda}_i$  é um autovalor de  $F$ , então  $\Delta(\hat{\lambda}_i)$  é um autovalor de  $\Delta(F)$ , pois

$$Fv = \hat{\lambda}_i v, \quad F^2 v = F\hat{\lambda}_i v = \hat{\lambda}_i^2 v$$

$$\begin{aligned} \Delta(F)v &= (F^4 + \alpha_3 F^3 + \alpha_2 F^2 + \alpha_1 F + \alpha_0 I)v \\ &= (\hat{\lambda}_i^4 + \alpha_3 \hat{\lambda}_i^3 + \alpha_2 \hat{\lambda}_i^2 + \alpha_1 \hat{\lambda}_i + \alpha_0 I)v = \Delta(\hat{\lambda}_i)v \end{aligned}$$

Como  $A$  e  $F$  não têm autovalores em comum,  $\Delta(\hat{\lambda}_i) \neq 0$  para todo autovalor de  $F$ . Além disso, como o determinante de uma matriz é igual ao produto de seus autovalores, tem-se

$$\det \Delta(F) = \prod_i \Delta(\hat{\lambda}_i) \neq 0$$

e portanto  $\Delta(F)$  é não singular.

Substituindo  $AT = TF + b\hat{k}$  em  $A^2 T - TF^2$ , tem-se

$$A^2 T - TF^2 = A(TF + b\hat{k}) - TF^2 = Ab\hat{k} + (AT - TF)F = Ab\hat{k} + b\hat{k}F$$

## Cômputo do ganho $k$ pela equação de Lyapunov IV

De maneira similar, obtém-se o conjunto de equações

$$\begin{aligned} IT - TI &= 0 \\ AT - TF &= b\hat{k} \\ A^2T - TF^2 &= Ab\hat{k} + b\hat{k}F \\ A^3T - TF^3 &= A^2b\hat{k} + Ab\hat{k}F + b\hat{k}F^2 \\ A^4T - TF^4 &= A^3b\hat{k} + A^2b\hat{k}F + Ab\hat{k}F^2 + b\hat{k}F^3 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por  $\alpha_0$ , a segunda por  $\alpha_1$ , a terceira por  $\alpha_2$ , a quarta por  $\alpha_3$ , a última por 1, e somando todas, tem-se (lembrando que  $\Delta(A) = 0$ )

$$\Delta(A)T - T\Delta(F) = -T\Delta(F) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{k}F \\ \hat{k}F^2 \\ \hat{k}F^3 \end{bmatrix}$$

Se  $(A, b)$  é controlável e  $(F, \hat{k})$  é observável, as matrizes acima são não-singulares, e como  $\Delta(F) \neq 0$ , necessariamente  $T$  é não singular.

Para a determinação de um ganho de realimentação de estados utilizando a equação de Lyapunov, é necessário escolher  $F$  e  $\hat{k}$ . Por exemplo,  $F$  na forma companheira e

$$\hat{k} = [ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ]$$

ou  $F$  na forma modal e  $\hat{k}$  com ao menos um elemento diferente de zero associado a cada bloco diagonal (para garantir a observabilidade do par  $(F, \hat{k})$ ).

Exemplo: Considere novamente o modelo linear para o pêndulo invertido e a alocação  $-1.5 \pm 0.5j$  e  $-1 \pm j$ . Escolhendo  $F$  na forma modal

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad \hat{k} = [ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 ]$$

e resolvendo com o Matlab, tem-se

$$k = [ -1.6667 \quad -3.6667 \quad -8.5833 \quad -4.3333 ]$$

Note que o ganho (para uma dada alocação) é único em sistemas SISO. Os comandos do Matlab `place` (se os autovalores forem distintos) ou `acker` podem ser usados para o cômputo de  $k$ .

Um sistema não controlável, descrito pelo par  $(A, b)$ , pode ser escrito por meio de uma transformação de similaridade na forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x$$

## Sistemas estabilizáveis I

A alocação arbitrária dos autovalores de  $A - bk$  só pode ser feita se o par  $(A, b)$  for controlável, pois os modos não controláveis não são afetados pelo ganho  $k$ . O sistema é denominado estabilizável se todos os modos não controláveis forem estáveis.

Prova:

Considere um sistema não controlável (isto é, nem todos os autovalores podem ser arbitrariamente alocados em malha fechada). A equação de estado pode ser transformada em

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x$$

com  $(\bar{A}_c, \bar{b}_c)$  controlável. Como a matriz  $\bar{A}$  é bloco triangular, os autovalores de  $A$  são os autovalores das matrizes  $\bar{A}_c$  e  $\bar{A}_{\bar{c}}$ .

A realimentação de estado

$$x = r - \hat{k}\bar{v} = r - \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & \hat{k}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

## Sistemas estabilizáveis II

produz o sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{b}_c \hat{k}_1 & \bar{A}_{12} - \bar{b}_c \hat{k}_2 \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Os autovalores de  $\bar{A}_{\bar{c}}$  não são afetados pela realimentação de estado. Se  $\bar{A}_{\bar{c}}$  é estável, o sistema é estabilizável.

## Sistemas MIMO

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Av + Bx \\ y &= Cv\end{aligned}$$

Com a realimentação de estado dada por

$$x = r - Kv, \quad K \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

tem-se

$$\begin{aligned}\dot{v} &= (A - BK)v + Br \\ y &= Cv\end{aligned}$$

O par  $(A - BK, B)$  é controlável para qualquer  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$  se e somente se o par  $(A, B)$  for controlável.

Os autovalores de  $(A - BK)$  podem ser arbitrariamente alocados (desde que os autovalores complexos apareçam em pares conjugados) pela escolha apropriada de  $K$  se e somente se  $(A, B)$  for controlável.

## Projeto cíclico

O problema MIMO é transformado em um problema SISO e então aplica-se o resultado de alocação de sistemas monovariáveis.

### Matriz cíclica

Uma matriz  $A$  é cíclica se seu polinômio mínimo é igual ao polinômio característico. O polinômio mínimo de  $A$  é o polinômio  $\Delta_m(\lambda)$  de menor grau tal que  $\Delta_m(A) = 0$ .

Em termos da forma de Jordan, uma matriz é cíclica se e somente se houver um único bloco de Jordan associado a cada autovalor distinto.

Se o par  $(A, B)$  é controlável e  $A$  é cíclica, então para quase todo vetor  $\xi \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ , o par  $(A, B\xi)$  é controlável.

## Projeto cíclico I

Prova:

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B\xi = B \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \alpha \\ \times \\ \beta \end{bmatrix}$$

Há apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor e portanto  $A$  é cíclica; a condição para que o par  $(A, B)$  seja controlável é que a terceira e a última linhas de  $B$  sejam não nulas.

A condição para que  $(A, B\xi)$  seja controlável é que  $\alpha \neq 0$  e  $\beta \neq 0$ . Como

$$\alpha = \xi_1 + 2\xi_2, \quad \beta = \xi_2$$

ou  $\alpha$  ou  $\beta$  valem zero se e somente se  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  ou  $\xi_1 = -2\xi_2$ . Qualquer outra escolha do vetor  $\xi$  torna o par  $(A, B\xi)$  controlável.

## Projeto cíclico II

A condição de que a matriz  $A$  seja cíclica é essencial. Por exemplo, o sistema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é controlável mas não existe  $\xi$  tal que  $(A, B\xi)$  seja controlável.

Note que possuir autovalores distintos é uma condição suficiente para a matriz  $A$  ser cíclica.

## Projeto cíclico I

Se  $(A, B)$  é controlável, então para quase toda matriz constante  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , a matriz  $(A - BK)$  tem autovalores distintos e, conseqüentemente, é cíclica.

Prova: considere  $n = 4$  e o polinômio característico de  $A - BK$

$$\Delta_f(s) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

cujos coeficientes são funções dos elementos  $k_{ij}$  da matriz  $K$ .

Se  $A - BK$  tiver autovalores (que são raízes de  $\Delta_f(s)$ ) iguais, então esses autovalores também são raízes do polinômio que é a derivada de  $\Delta_f(s)$

$$\Delta'_f(s) = 4s^3 + 3\alpha_3 s^2 + 2\alpha_2 s + \alpha_1$$

## Projeto cíclico II

Se  $\Delta_f(s)$  e  $\Delta'_f(s)$  têm raízes comuns, então os polinômios não são coprimos. A condição necessária e suficiente para que os polinômios não sejam coprimos é que a matriz de Sylvester associada seja singular, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 2\alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 3\alpha_3 & \alpha_1 & 2\alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 4 & \alpha_2 & 3\alpha_3 & \alpha_1 & 2\alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \alpha_3 & 4 & \alpha_2 & 3\alpha_3 & \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_3 & 4 & \alpha_2 & 3\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = f(k_{ij}) = 0$$

Entre todas as possíveis escolhas para  $k_{ij}$ , há pouca probabilidade de que  $f(k_{ij}) = 0$ .

## Projeto cíclico

O procedimento para a alocação dos autovalores de  $(A - BK)$  é dado por:

- Se  $A$  não for cíclica, introduzir a realimentação  $x = w - K_1 v$  tal que  $\bar{A} = A - BK_1$  seja cíclica.

$$\dot{v} = (A - BK_1)v + Bw = \bar{A}v + Bw$$

- Como  $(A, B)$  é controlável,  $(\bar{A}, B)$  também o é. Assim, existe um vetor  $\xi$  tal que  $(\bar{A}, B\xi)$  é controlável.
- Determine o ganho  $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  que aloca os autovalores de  $\bar{A} - B\xi k$  nas posições desejadas e define a lei de controle para o sistema transformado

$$w = r - K_2 v, \quad K_2 = \xi k$$

A lei de controle do sistema original é dada por

$$x = r - (K_1 + K_2)v = r - Kv$$

## Observadores de Estado

A realimentação de estados pressupõe que os estados  $v$  são disponíveis, o que nem sempre é possível. Além disso, pode existir limitação quanto ao número de sensores ou medidores no sistema.

Quando os estados não estão disponíveis, observadores de estado podem ser utilizados para estimar os valores de  $v$ . Observadores são estimadores do estado para sistemas determinísticos.

# Sistemas SISO I

A Figura 2 apresenta o observador de estados como proposto por Luenberger em 1964. Note que supõe-se o conhecimento da entrada e da saída do sistema, e também que o modelo representa de maneira acurada o sistema físico.

## Sistemas SISO II

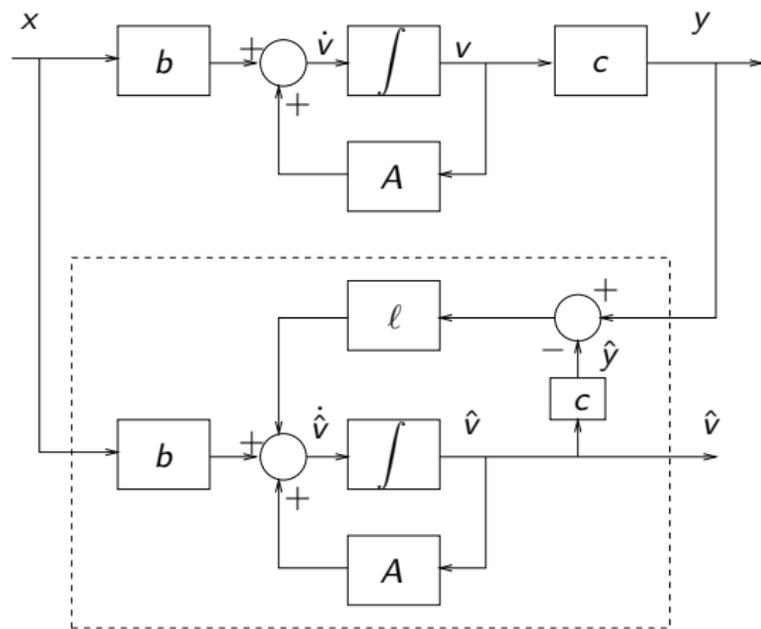


Figura : Observador de estados.

## Sistemas SISO III

O observador é construído a partir da escolha da matriz  $\ell$ . A justificativa para essa estrutura vem do fato de que o erro

$$e = v - \hat{v}$$

é assintoticamente nulo se todos autovalores da matriz  $A - \ell c$  tiverem parte real negativa. De fato,

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv$$

$$\dot{\hat{v}} = A\hat{v} + bx + \ell(y - \hat{y}) \quad , \quad \hat{y} = c\hat{v}$$

$$\dot{\hat{v}} = (A - \ell c)\hat{v} + bx + \ell y$$

$$\dot{e} = \dot{v} - \dot{\hat{v}} = (A - \ell c)(v - \hat{v}) = (A - \ell c)e$$

Portanto, a dinâmica do erro é descrita por um sistema autônomo, isto é, independente da entrada. Além disso, alocando apropriadamente os autovalores de  $A - \ell c$ , pode-se controlar a taxa com que o erro tende a zero.

## Sistemas SISO IV

Os autovalores de  $(A - \ell c)$  podem ser alocados arbitrariamente pela escolha de um ganho  $\ell$  se e somente se o par  $(A, c)$  for observável.

Prova: por dualidade, se  $(A', c')$  é controlável, então os autovalores de  $(A' - c'k)$  podem ser alocados arbitrariamente. Basta fazer  $\ell = k'$ .

## Cômputo do estimador pela equação de Lyapunov

Considere o sistema de dimensão  $n$

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv$$

- 1 Escolha uma matriz  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  estável com os autovalores desejados (distintos de  $A$ ).
- 2 Escolha  $\ell$  arbitrário tal que  $(F, \ell)$  seja controlável.
- 3 Obtenha a solução única  $T$  da equação de Lyapunov

$$TA - FT = \ell c$$

- 4 A equação de estado

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Fz + Tbx + \ell y \\ \hat{v} &= T^{-1}z\end{aligned}$$

gera um estimador para  $v$ .

Se  $A$  e  $F$  não têm autovalores em comum, então a única solução de  $TA - FT = \ell c$  é não-singular se e somente se  $(A, c)$  é observável e  $(F, \ell)$  é controlável.

Definindo  $e = z - Tv$

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{v} = Fz + Tbx + \ell cv - TAv - Tbx$$

e, como  $TA = FT + \ell c$ , tem-se

$$\dot{e} = Fz + \ell cx - (FT + \ell c)x = F(z - Tv) = Fe$$

Se  $F$  é estável,  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ , e  $z \rightarrow Tv$ , e portanto  $T^{-1}z$  é um estimador para  $v$ .

## Estimador de estado de ordem reduzida

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Av + bx \\ y &= cv\end{aligned}$$

Sistemas observáveis podem ser colocados na forma canônica observável. Por exemplo, para  $n = 4$ , tem-se

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \begin{bmatrix} -\alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} x \\ y &= [ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 ] v\end{aligned}$$

Note que a saída  $y(t)$  é a primeira variável de estado, e portanto pode-se construir um estimador de estado apenas para as demais variáveis  $v_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$

## Estimador de ordem reduzida pela equação de Lyapunov

- 1 Escolha  $F \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  estável com autovalores distintos de  $A$ .
- 2 Escolha  $\ell$  arbitrário tal que  $(F, \ell)$  seja controlável.
- 3 Obtenha a solução única  $T \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$  da equação de Lyapunov  $TA - FT = \ell c$
- 4 A equação de estado  $(n-1)$ -dimensional estima  $v$

$$\dot{z} = Fz + Tbx + \ell y$$
$$\hat{v} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Note que a equação

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

pode ser escrita

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix} \hat{v}$$

e portanto  $y = c\hat{v}$  e  $z = T\hat{v}$ . Então,  $y$  é um estimador para  $cv$  e  $z$  para  $Tv$ , pois

$$e = z - Tv$$

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{v} = Fz + Tbx + \ell cv - TAv - Tbx = Fe$$

e, novamente, se  $F$  é estável, então  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Se  $A$  e  $F$  não têm autovalores em comum, então a matriz quadrada

$$P = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}$$

com  $T$  solução única de  $TA - FT = \ell c$  é não singular se e somente se  $(A, c)$  for observável e  $(F, \ell)$  for controlável.

## Realimentação a partir dos estados estimados I

Considere o sistema

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$y = cv$$

Se  $(A, b)$  é controlável, a realimentação de estados  $x = r - kv$  aloca arbitrariamente os autovalores de  $(A - bk)$ .

Entretanto, o vetor de estado nem sempre está disponível para a realimentação. Nesse caso, pode-se construir um observador de estados.

Se  $(A, c)$  é observável, um observador de estados de ordem completa ou reduzida com autovalores arbitrários pode ser construído. Por exemplo, o estimador de ordem  $n$  dado por

$$\dot{\hat{v}} = (A - lc)\hat{v} + bx + ly$$

A escolha de  $l$  (ou melhor, dos autovalores de  $(A - lc)$ ) determina a taxa com que o estado estimado  $\hat{v}$  converge para o estado do sistema.

A realimentação dos estados estimados produz

$$x = r - k\hat{v}$$

## Realimentação a partir dos estados estimados II

e, combinando as equações, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Av - bk\hat{v} + br \\ \dot{\hat{v}} &= (A - lc)\hat{v} + b(r - k\hat{v}) + lcv\end{aligned}$$

que é um sistema de dimensão  $2n$ , que pode ser escrito

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\hat{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -bk \\ lc & A - lc - bk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \hat{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \hat{v} \end{bmatrix}$$

Definindo uma transformação de similaridade

$$\begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v - \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \hat{v} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = P$$

## Realimentação a partir dos estados estimados III

tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk & bk \\ 0 & A - lc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} r$$
$$y = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix}$$

Note que os autovalores da matriz dinâmica do sistema aumentado são a união dos autovalores de  $(A - bk)$  e  $(A - lc)$ . Portanto, o estimador não altera os autovalores nem tem seus autovalores modificados pela conexão. Essa propriedade é conhecida como o princípio da separação.

## Realimentação a partir dos estados estimados IV

Além disso, o sistema aumentado é não controlável (forma canônica), e a função de transferência do sistema é igual à da equação

$$\dot{v} = (A - bk)v + br \quad , \quad y = cv$$

dada por

$$G_f(s) = c(sI - A + bk)^{-1}b$$

Ou seja, na função de transferência não aparece o estimador.

De fato, no cômputo de funções de transferência, as condições iniciais são assumidas iguais a zero e, portanto,  $v(0) = \hat{v}(0) = 0$  o que garante que  $v(t) = \hat{v}(t)$  para todo  $t$ .

## Sistemas MIMO

Considere o sistema

$$\dot{v} = Av + Bx, \quad y = Cv$$

O estimador de ordem completa (isto é, a dimensão de  $\hat{v}$  é a mesma de  $v$ ) é dado por

$$\dot{\hat{v}} = (A - LC)\hat{v} + Bx + Ly$$

A dinâmica do erro é descrita pela equação autônoma

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Se  $(A, C)$  é observável, então todos os autovalores de  $(A - LC)$  podem ser arbitrariamente alocados pela escolha de  $L$  (determinando assim a taxa com que  $\hat{v}$  converge para  $v$ ).

O ganho  $L$  do estimador pode ser computado pelos mesmos métodos utilizados para o cálculo do ganho  $K$  do controlador (dualidade).

## Estimadores de ordem reduzida I

Considere novamente o sistema

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad y = Cv$$

com  $\text{rank}(C) = q$ . Defina a transformação de similaridade

$$P = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$$

com  $R \in \mathbb{R}^{(n-q) \times n}$  escolhida de maneira a que exista  $P^{-1} = Q$ , que por sua vez pode ser particionada na forma

$$Q = P^{-1} = [ Q_1 \mid Q_2 ] \quad , \quad Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times q} \quad , \quad Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-q)}$$

Como  $QP = I$ , tem-se

$$I_n = PQ = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} [ Q_1 \quad Q_2 ] = \begin{bmatrix} CQ_1 & CQ_2 \\ RQ_1 & RQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}$$

Aplicando a transformação de similaridade  $v = Q\hat{v} = P^{-1}\hat{v}$  no sistema, tem-se

$$\dot{\hat{v}} = PAP^{-1}\hat{v} + PBx$$

## Estimadores de ordem reduzida II

$$y = CP^{-1}\bar{v} = CQ\bar{v} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} \bar{v}$$

ou, reescrevendo em termos das partições,

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_1 \\ \dot{\bar{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} \bar{v} = \bar{v}_1, \quad \bar{v}_1 \in \mathbb{R}^{q \times 1}, \quad \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^{(n-q) \times 1}$$

Como a saída  $y$  do sistema transformado coincide com os  $q$  primeiros estados  $\bar{v}_1$ , apenas os demais  $n - q$  elementos do vetor  $\bar{v}$  precisam ser estimados.

A equação de estados pode ser reescrita como

$$\dot{y} = \bar{A}_{11}y + \bar{A}_{12}\bar{v}_2 + \bar{B}_1x$$

$$\dot{\bar{v}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{v}_2 + \bar{A}_{21}y + \bar{B}_2x$$

e, definindo-se

$$\bar{x} = \bar{A}_{21}y + \bar{B}_2x, \quad w = \dot{y} - \bar{A}_{11}y - \bar{B}_1x$$

tem-se

$$\dot{\bar{v}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{v}_2 + \bar{x}, \quad w = \bar{A}_{12}\bar{v}_2$$

## Estimadores de ordem reduzida III

O par  $(A, C)$  (ou o par  $(\bar{A}, \bar{C})$ ) é observável se e somente se o par  $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$  é observável.

Portanto, existe um estimador para  $\bar{v}_2$  na forma

$$\dot{\hat{v}}_2 = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{v}_2 + \bar{L}w + \bar{x} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{v}_2 + \bar{L}(\dot{y} - \bar{A}_{11}y - \bar{B}_1x) + (\bar{A}_{21}y + \bar{B}_2x)$$

Definindo  $z = \hat{v}_2 - \bar{L}y$ , tem-se

$$\dot{z} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})(z + \bar{L}y) + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11})y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)xu$$

$$\dot{z} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})z + \left( (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L} + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11}) \right)y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)x$$

sendo que  $z + \bar{L}y$  é uma estimativa de  $\bar{v}_2$ .

Com o erro dado por

$$e = \bar{v}_2 - (z + \bar{L}y)$$

a equação dinâmica do erro é

$$\dot{e} = \dot{\bar{v}}_2 - (\dot{z} + \bar{L}\dot{y}) = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})e$$

## Estimadores de ordem reduzida IV

Como o par  $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$  é observável, os autovalores de  $\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12}$  podem ser alocados arbitrariamente.

O estado estimado é composto pela informação precisa obtida da saída  $y$  mais a estimativa  $z + \bar{L}y$ , isto é,

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \bar{L}y + z \end{bmatrix}$$

Nas coordenadas originais, tem-se

$$\hat{v} = P^{-1}\hat{v} = Q\hat{v} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \bar{L}y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ \bar{L} & I_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Os autovalores de  $\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12}$  podem ser alocados pela escolha de  $\bar{L}$ , usando-se os mesmos métodos utilizados para cálculo de realimentação de estados.

## Estimador de ordem reduzida pela equação de Lyapunov

Considere um sistema de dimensão  $n$  e  $q$  saídas, com o par  $(A, C)$  observável e  $C$  de rank  $q$ .

- 1 Escolha  $F \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$  estável arbitrária mas com autovalores diferentes daqueles de  $A$ .
- 2 Escolha  $L \in \mathbb{R}^{(n-q) \times q}$  tal que  $(F, L)$  seja controlável.
- 3 Obtenha  $T \in \mathbb{R}^{(n-q) \times n}$  solução única da equação de Lyapunov

$$TA - FT = LC$$

- 4 Se a matriz quadrada

$$P = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$$

for singular, retorne ao passo 2 e repita o processo para outra matriz  $L$ . Se  $P$  for não singular, a equação de estado de ordem  $n - q$

$$\dot{z} = Fz + TBx + Ly, \quad \hat{v} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

produz um estimador para  $v$ .

Da equação do estimador, tem-se  $y = C\hat{v}$  ( $y$  portanto estima  $Cv$ ) e  $z = T\hat{v}$ .

Definindo  $e = z - Tv$ , tem-se

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{v} = Fz + TBx + LCv - TA\dot{v} - TBx = Fz + (LC - TA)v = F(z - Tv) = Fe$$

Se  $F$  é estável,  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$  e portanto  $z$  é um estimador para  $Tv$

Se  $A$  e  $F$  não têm autovalores em comum, então a matriz quadrada

$$P = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$$

com  $T$  solução única de  $TA - FT = LC$  é não singular somente se  $(A, C)$  é observável e  $(F, L)$  é controlável.

Condição apenas necessária. Dado um par  $(A, C)$  observável, é possível escolher  $(F, L)$  controlável e obter  $P$  singular.

Considere o sistema  $n$  dimensional

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Av + Bx \\ y &= Cv\end{aligned}$$

e o estimador de ordem  $n - q$

$$\dot{z} = Fz + TBx + Ly$$

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Particionando a inversa de  $P$  na forma

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$$

com  $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}$  e  $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-q)}$ , isto é,

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = Q_1 C + Q_2 T = I$$

pode-se re-escrever o estimador de ordem  $n - q$

$$\dot{z} = Fz + TBx + Ly$$

$$\hat{v} = Q_1y + Q_2z$$

Se o estado do sistema não estiver disponível para realimentação, pode-se utilizar o estado estimado  $\hat{v}$

$$x = r - K\hat{v} = r - KQ_1y - KQ_2z$$

$$\dot{v} = Av + B(r - KQ_1y - KQ_2z) = (A - BKQ_1C)v - BKQ_2z + Br$$

$$\dot{z} = Fz + TB(r - KQ_1y - KQ_2z) + LCv = (LC - TBKQ_1C)v + (F - TBKQ_2)z + TBr$$

A equação do sistema aumentado (dimensão  $2n - q$ ) é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BKQ_1C & -BKQ_2 \\ LC - TBKQ_1C & F - TBKQ_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ TB \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix}$$

ou, utilizando uma transformação de similaridade

$$\begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ z - Tv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -T & I_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix}$$

que, usando a equação  $TA - FT = LC$  e as partições  $Q_1$  e  $Q_2$  da inversa de  $P$ , produz

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BKQ_2 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix}$$

Assim como no caso SISO, vale o princípio da separação e a matriz de transferência de  $r$  para  $y$  é dada por

$$G_f(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B$$

# Compensadores

De maneira geral, o projeto de um sistema de controle consiste em determinar o sinal de entrada  $x$  para que a saída  $y$  tenha um certo comportamento em relação à referência  $r$ , como ilustrado na Figura 3.

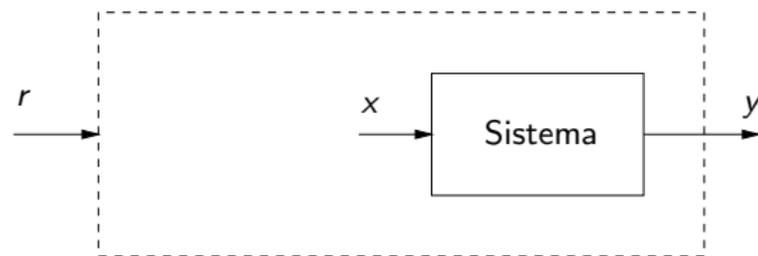


Figura : Sistema de controle.

Na estratégia mostrada na Figura 4, denominada controle em malha aberta, o sinal de atuação  $x$  depende apenas do sinal de referência  $r$  e do controlador  $C(s)$  para alterar o comportamento da planta  $H(s)$ . O esquema é sujeito a ruídos, incertezas e imprecisões.

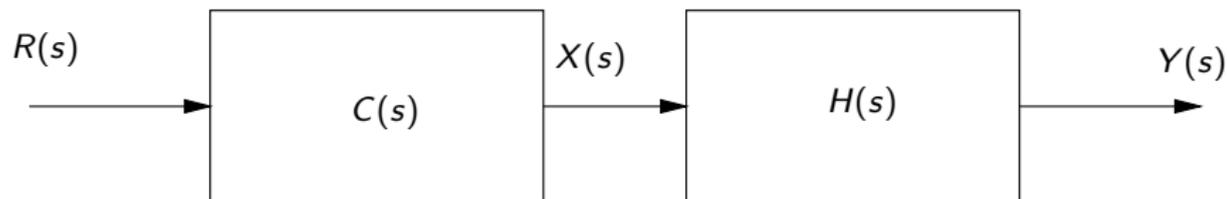


Figura : Controle em malha aberta.

Estratégias em malha fechada utilizam informações do que está acontecendo com a planta (geralmente, um sinal de saída) para influenciar o comportamento do controlador, como por exemplo no esquema de realimentação unitária mostrado na Figura 5.

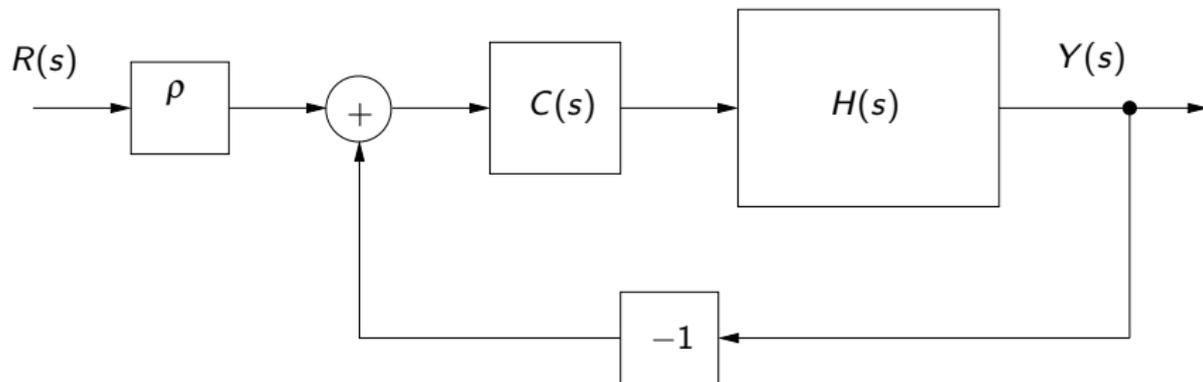


Figura : Realimentação unitária com ganho *feedforward*  $\rho$ .

O ganho constante  $\rho$  (chamado de *feedforward*) e o compensador  $C(s)$  devem ser projetados para garantir um certo comportamento em malha fechada. O sinal de controle (entrada de  $H(s)$ ) é dado por

$$X(s) = C(s)(\rho R(s) - Y(s))$$

e a função de transferência em malha fechada é

$$G(s) = \rho \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)}, \quad C(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow G(s) = \rho \frac{B(s)N(s)}{A(s)D(s) + B(s)N(s)}$$

Note que a dinâmica do sistema controlado é governada pelos pólos em malha fechada, e que o controlador não afeta os zeros do sistema original.

## Frações coprimas

O sistema racional próprio  $H(s)$  dado por

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^m + \alpha_{m-1} s^{m-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

possui pólos e zeros coincidentes (isto é, pode ser simplificado e reescrito como uma razão de polinômios de graus menores do que  $m$ ) ou, equivalentemente,  $N(s)$  e  $D(s)$  não são coprimos se e somente se  $\det(S) = 0$ , com a matriz  $S \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$  dada por

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_0 & \beta_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & \beta_m \end{bmatrix}$$

Prova: se  $H(s)$  puder ser simplificada, então

$$\begin{aligned} \frac{N(s)}{D(s)} &= \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{s^m + \alpha_{m-1} s^{m-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \\ &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s + b_0}{a_{m-1} s^{m-1} + a_{m-2} s^{m-2} + \dots + a_1 s + a_0} \Rightarrow N(s)A(s) - D(s)B(s) = 0 \end{aligned}$$

com os coeficientes  $a_i, b_i$  a determinar. Multiplicando e igualando os termos de mesma potência em  $s$ , tem-se o sistema de  $2m$  equações com  $2m$  incógnitas

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_0 & \beta_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_0 & \beta_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \beta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_0 \\ a_0 \\ -b_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ -b_{m-1} \\ a_{m-1} \end{bmatrix} = 0$$

que possui solução diferente da trivial se e somente se  $\det(S) = 0$ . A matriz  $S$  é chamada de matriz de Sylvester associada à planta  $H(s) = N(s)/D(s)$ .

## Propriedade

Considere o esquema de realimentação unitária mostrado na Figura 5, com

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad C(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

e função de transferência em malha fechada dada por

$$G(s) = \rho \frac{1}{1 + C(s)H(s)} = \frac{\rho B(s)N(s)}{A(s)D(s) + B(s)N(s)}$$

Existem  $A(s)$  e  $B(s)$  que alocam arbitrariamente os pólos em malha fechada se e somente se os polinômios  $N(s)$  e  $D(s)$  forem coprimos.

Prova:

Os pólos em malha fechada são dados pelas raízes do denominador de  $G(s)$ , isto é, de

$$F(s) = A(s)D(s) + B(s)N(s)$$

e se houver um fator comum, por exemplo, um zero e um pólo em  $-\sigma$ ,  $D(s)$  e  $N(s)$  podem ser fatorados em termos de  $(s + \sigma)$ . Nesse caso, só existe solução se  $F(s)$  apresentar o mesmo fator comum (e portanto a alocação não é arbitrária).

Uma solução para a alocação dos pólos em malha fechada nas raízes de  $F(s)$  pode ser obtida a partir da identidade de Bézout, isto é, obtendo-se  $\bar{A}(s)$  e  $\bar{B}(s)$  tais que

$$\bar{A}(s)D(s) + \bar{B}(s)N(s) = 1$$

e multiplicando a equação acima por  $F(s)$  para determinar  $A(s) = F(s)\bar{A}(s)$  e  $B(s) = F(s)\bar{B}(s)$ .

## Exemplo I

Note que sempre existem  $\hat{A}(s)$  e  $\hat{B}(s)$  tais que

$$\hat{A}(s)D(s) + \hat{B}(s)N(s) = 0$$

(por exemplo  $\hat{A}(s) = -N(s)$  e  $\hat{B}(s) = D(s)$ ), e que uma solução geral para a equação

$$F(s) = A(s)D(s) + B(s)N(s)$$

é dada por

$$A(s) = \bar{A}(s)F(s) + Q(s)\hat{A}(s), \quad B(s) = \bar{B}(s)F(s) + Q(s)\hat{B}(s)$$

com  $Q(s)$  arbitrário e  $\bar{A}(s)$ ,  $\bar{B}(s)$  tais que  $\bar{A}(s)D(s) + \bar{B}(s)N(s) = 1$ .

Considere  $D(s) = s^2 - 1$ ,  $N(s) = s - 2$  e  $F(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$ . Da identidade de Bézout tem-se

$$-\frac{1}{3}(s^2 - 1) + \frac{1}{3}(s + 2)(s - 2) = 1$$

e portanto

$$A(s) = \frac{1}{3}(s^3 + 4s^2 + 6s + 4) + Q(s)(-s + 2)$$

## Exemplo II

$$B(s) = -\frac{1}{3}(s+2)(s^3 + 4s^2 + 6s + 4) + Q(s)(s^2 - 1)$$

é solução geral para a equação do compensador, com  $Q(s)$  arbitrário.

Como em geral o custo de implementação é proporcional à ordem do controlador, soluções com ordem elevada podem não ser convenientes. Uma escolha para  $Q(s)$  é dada por

$$Q(s) = (s^2 + 6s + 15)/3$$

que implica em

$$A(s) = s + \frac{34}{3}, \quad B(s) = \frac{-22s - 23}{3}$$

## Alocação de pólos

Considere um sistema racional próprio dado por

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

com  $N(s)$  e  $D(s)$  coprimos de grau  $m$ . Então, os  $m + \ell$  pólos de malha fechada da estrutura de realimentação unitária mostrada na Figura 5 podem ser arbitrariamente alocados por um controlador próprio de grau  $\ell$  se e somente se

$$\ell \geq m - 1$$

Prova:

Considere  $H(s)$  e  $C(s)$  dados por

$$H(s) = \frac{\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$$

A equação de alocação de  $m + \ell = 3$  pólos em malha fechada (raízes do polinômio  $F(s) = s^3 + f_2 s^2 + f_1 s + f_0$ ) é dada por

$$(s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0)(a_1 s + a_0) + (\beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0)(b_1 s + b_0) = s^3 + f_2 s^2 + f_1 s + f_0$$

Igualando os termos de mesma potência em  $s$  e re-escrevendo em forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_0 & \beta_0 \\ 1 & \beta_2 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Sc = f$$

que é um sistema de  $m + \ell + 1 = 4$  equações com  $2(\ell + 1) = 4$  incógnitas. Neste caso, a matriz  $S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  é a matriz de Sylvester  $2m \times 2m$  associada aos polinômios coprimos  $N(s)$  e  $D(s)$  e tem *rank* pleno igual a 4. Como conseqüência, a solução é única, dada por  $c = S^{-1}f$ .

No caso geral, para que o sistema de equações  $A(s)D(s) + B(s)N(s) = F(s)$  tenha solução com  $F(s)$  arbitrário, a condição necessária e suficiente é que o sistema de equações resultante tenha *rank* completo de linhas, o que requer

$$2(\ell + 1) \geq m + \ell + 1 \quad \Rightarrow \quad \ell \geq m - 1$$

Note que, por construção, o *rank* completo de linhas  $m + \ell + 1$  é assegurado para  $\ell \geq m - 1$ . Um aumento unitário na ordem do controlador resulta em uma nova linha que é linearmente independente das anteriores e em dois novos parâmetros a determinar. Graus maiores que  $m - 1$  podem ser usados com outras finalidades (por exemplo, para a obtenção de um controlador estritamente próprio).

Note ainda que para escolhas de  $\ell$  que não satisfazem a restrição  $\ell \geq m - 1$ , pode ou não existir solução dependendo da escolha de  $F(s)$  (que, portanto, deixa de ser arbitrário).

## Regulação

Considere o esquema de realimentação unitária da Figura 5 com sinal de referência nulo.

Um compensador  $C(s)$  que aloque os pólos em malha fechada do sistema realimentado no semiplano esquerdo (pólos com parte real negativa, ou seja, função de transferência em malha fechada BIBO estável) garante que a resposta tende assintoticamente a zero para qualquer condição inicial.

O ganho *feedforward* não é necessário neste caso (isto é,  $\rho = 1$ ).

## Rastreamento I

Considere o esquema de realimentação unitária da Figura 5 com o sinal de referência igual a um degrau de amplitude  $a$ .

O rastreamento assintótico (isto é, o sinal de saída tendendo a  $a$  quando  $t \rightarrow +\infty$ ) é assegurado por um controlador  $C(s)$  que aloque os pólos no semiplano esquerdo do plano complexo e um ganho de *feedforward* dado por

$$\rho = \frac{f_0}{b_0\beta_0}$$

pois, com a BIBO estabilidade da função de transferência em malha fechada e um sinal de referência  $r(t) = au(t)$ , tem-se

$$Y(s) = \rho \left( \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)} \right) \frac{a}{s}$$

e, pelo teorema do valor final,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \rho \frac{C(0)H(0)}{1 + C(0)H(0)} a$$

## Rastreamento II

Portanto, para que não ocorra erro de regime, é preciso que

$$\rho \frac{C(0)H(0)}{1 + C(0)H(0)} = 1 \Rightarrow \rho = \frac{A(0)D(0) + B(0)N(0)}{B(0)N(0)}$$

Como

$$C(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_i b_i s^i}{\sum_i a_i s^i}, \quad H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_i \beta_i s^i}{\sum_i \alpha_i s^i}, \quad A(s)D(s) + B(s)N(s) = F(s) = \sum_i f_i s^i$$

tem-se

$$\rho = \frac{f_0}{b_0 \beta_0}$$

Note que o rastreamento assintótico exige  $\beta_0 \neq 0$  (ou seja, a planta não pode ter zeros em  $s = 0$ ) e que o controlador seja tal que  $b_0 \neq 0$ .

## Exemplo: Alocação de pólos com rastreamento I

Considere a planta

$$G(s) = \frac{(s-2)}{(s^2-1)}$$

e o esquema de realimentação unitária da Figura 5. Pela Propriedade 68, um controlador  $C(s)$  próprio de grau 1 aloca arbitrariamente os pólos do sistema em malha fechada. Por exemplo, escolhendo  $-2, -1 \pm j$  tem-se

$$F(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

Da equação do compensador, obtém-se

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 1, a_0 = 34/3, b_1 = -22/3, b_0 = -23/3 \Rightarrow C(s) = \frac{-22s - 23}{3s + 34}$$

## Exemplo: Alocação de pólos com rastreamento II

Para garantir o rastreamento assintótico, o ganho *feedforward* é dado por

$$\rho = \frac{f_0}{b_0\beta_0} = \frac{6}{23}$$

e a função de transferência em malha fechada é

$$G(s) = \frac{-2(22s + 23)(s - 2)}{23(s^3 + 4s^2 + 6s + 4)}$$

Note que essa estratégia para o rastreamento é sensível a variações de parâmetros.

## Princípio do modelo interno I

Considere o sistema realimentado da Figura 6.

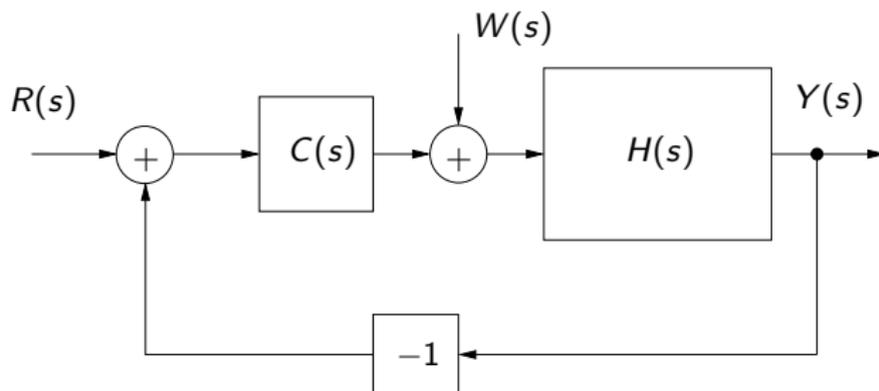


Figura : Rejeição de distúrbios.

## Princípio do modelo interno II

A rejeição de distúrbios  $W(s)$  conhecidos e o rastreamento robusto (isto é, não sensível a variações de parâmetros) para referências  $R(s)$  são assegurados por um controlador que possua como pólos todos os pólos instáveis de  $W(s)$  e  $R(s)$ , desde que nenhum desses pólos seja zero de  $H(s)$ .

Prova:

Suponha as funções próprias

$$R(s) = \frac{N_r(s)}{D_r(s)}, \quad W(s) = \frac{N_w(s)}{D_w(s)}$$

com  $D_r(s)$ ,  $D_w(s)$  conhecidos e  $N_r(s)$ ,  $N_w(s)$  arbitrários e que os pólos instáveis de  $R(s)$  e  $W(s)$  foram agrupados em um polinômio  $\phi(s)$ . Se nenhuma raiz de  $\phi(s)$  é zero de  $H(s) = N(s)/D(s)$ , então  $D(s)\phi(s)$  e  $N(s)$  são coprimos.

Portanto, existe um compensador próprio  $B(s)/A(s)$  que aloca os pólos do sistema em malha fechada nas raízes do polinômio  $F(s)$  (equação do compensador)

$$A(s)D(s)\phi(s) + B(s)N(s) = F(s)$$

## Princípio do modelo interno III

O projeto é feito como se  $\phi(s)$  fizesse parte do denominador da planta, como ilustrado na Figura 7, determinando-se  $C(s) = B(s)/A(s)$  que aloque os pólos no semiplano esquerdo.

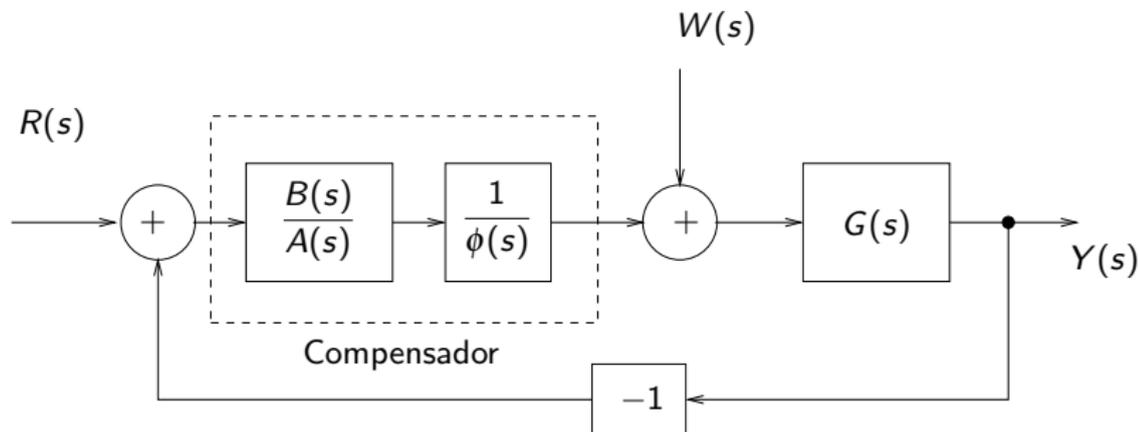


Figura : Realimentação unitária e princípio do modelo interno.

## Princípio do modelo interno IV

Computando a função de transferência em malha fechada de  $W(s)$  para  $Y(s)$

$$\begin{aligned} G_{yw}(s) &= \frac{N(s)/D(s)}{1 + (B(s)/A(s)\phi(s))(N(s)/D(s))} \\ &= \frac{N(s)A(s)\phi(s)}{A(s)D(s)\phi(s) + B(s)N(s)} = \frac{N(s)A(s)\phi(s)}{F(s)} \end{aligned}$$

A saída devido à entrada  $W(s)$  é dada por

$$Y_w(s) = G_{yw}(s)W(s) = \frac{N(s)A(s)\phi(s)}{F(s)} \frac{N_w(s)}{D_w(s)}$$

Como todas as raízes instáveis de  $D_w(s)$  são canceladas por  $\phi(s)$ , todos os pólos de  $Y_w(s)$  têm parte real negativa, e  $y_w(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

De maneira análoga, computando a saída  $Y_r(s)$

$$Y_r(s) = G_{yr}(s)R(s) = \frac{B(s)N(s)}{A(s)D(s)\phi(s) + B(s)N(s)} R(s)$$

## Princípio do modelo interno V

Em termos do erro  $E(s) = R(s) - Y_r(s)$ , tem-se

$$E(s) = R(s) - Y_r(s) = (1 - G_{yr}(s))R(s) = \frac{A(s)D(s)\phi(s)}{F(s)} \frac{N_r(s)}{D_r(s)}$$

Termos instáveis de  $D_r(s)$  são cancelados, e  $r(t) - y_r(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Por linearidade,  $y(t) = y_w(t) + y_r(t)$  e portanto  $r(t) - y(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Note que o rastreamento assintótico e a rejeição de distúrbios são assegurados pelo cancelamento da parte instável comum em  $D_w(s)$  e  $D_r(s)$  com  $\phi(s)$ , mas não há cancelamentos de pólos e zeros instáveis na alocação dos pólos de malha fechada.

Mesmo para variações de parâmetros em  $D(s)$ ,  $N(s)$ ,  $A(s)$  e  $B(s)$ , o rastreamento assintótico e a rejeição são assegurados (desde que o sistema em malha fechada permaneça BIBO estável), o que caracteriza a robustez do controlador.

## Exemplo I

Considere novamente a planta do Exemplo e o problema de rastreamento assintótico robusto para qualquer entrada em degrau (isto é, modelo interno  $\phi(s) = s$ ). A equação de alocação de pólos é dada por

$$A(s)D(s)\phi(s) + B(s)N(s) = F(s)$$

e, com um controlador de ordem 2, tem-se  $F(s)$  de grau 5.

Escolhendo os pólos  $-2$ ,  $-2 \pm j$  e  $-1 \pm 2j$ , tem-se

$$F(s) = s^5 + 8s^4 + 30s^3 + 66s^2 + 85s + 50$$

resultando no sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 85 \\ 66 \\ 30 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplo II

cuja solução é

$$\begin{bmatrix} 127.3 \\ -25 \\ 8 \\ -118.7 \\ 1 \\ -96.3 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{-96.3s^2 - 118.7s - 25}{s^2 + 8s + 127.3},$$

$$C(s) = \frac{B(s)}{A(s)\phi(s)} = \frac{-96.3s^2 - 118.7s - 25}{(s^2 + 8s + 127.3)s}$$

## Sistemas Variantes no Tempo

Considere o sistema linear variante no tempo dado por

$$\dot{v}(t) = A(t)v(t) + B(t)x(t) \quad (2)$$

$$y(t) = C(t)v(t) + D(t)x(t) \quad (3)$$

Se as matrizes do sistema (2)-(3) são funções contínuas no tempo, a solução  $v(t)$  é unicamente determinada por  $v(t_0) = v_0$  e  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, +\infty)$ .

As soluções da equação homogênea (para o conjunto de todas as possíveis condições iniciais)

$$\dot{v}(t) = A(t)v(t) \quad (4)$$

com  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para todo  $t$ , formam um espaço linear de dimensão  $n$ , pois para  $\psi_1(t), \psi_2(t) \in \mathbb{R}^n$  soluções e  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\alpha_1 \psi_1(t) + \alpha_2 \psi_2(t)) &= \alpha_1 \dot{\psi}_1(t) + \alpha_2 \dot{\psi}_2(t) \\ &= \alpha_1 A(t) \psi_1(t) + \alpha_2 A(t) \psi_2(t) = A(t) (\alpha_1 \psi_1(t) + \alpha_2 \psi_2(t)) \end{aligned}$$

Além disso, se a solução  $v(t)$  é nula para algum valor  $t_1$ , então  $v(t) = 0, \forall t$ , pois 0 é um ponto de equilíbrio do sistema (ou seja, não existe solução que passe pelo ponto de equilíbrio  $v = 0$  a não ser a função  $v(t) = 0, \forall t$ ).

## Definição: Matriz Fundamental I

Matriz fundamental é qualquer matriz composta por colunas soluções da equação homogênea (4) associadas a  $n$  condições iniciais linearmente independentes.

$$\Psi(t) = [ \psi_1(t) \quad \psi_2(t) \quad \cdots \quad \psi_n(t) ] \Rightarrow \dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t)$$

Note que  $\Psi(t_0)$  é composta pelas  $n$  condições iniciais linearmente independentes  $\psi_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , e que como as escolhas são arbitrárias, a matriz fundamental não é única.

### Propriedade

Uma matriz fundamental é não singular para todo  $t$ .

Prova: considerando que para algum  $t_1$  existem  $\alpha_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  não todos nulos, tais que

$$v(t_1) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k(t_1) = 0$$

## Definição: Matriz Fundamental II

tem-se

$$v(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k(t) = 0, \quad \forall t$$

pois  $v(t)$  é solução (combinação linear de soluções). Isso implicaria

$$v(t_0) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k(t_0) = 0$$

o que contradiz a hipótese de que os vetores  $\psi_k(t_0)$  (condições iniciais) são linearmente independentes.

Exemplo: Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} v$$

cuja solução é, para  $t_0 = 0$  e  $v(0)$  dados

$$\dot{v}_1(t) = 0 \Rightarrow v_1(t) = v_1(0)$$

## Definição: Matriz Fundamental III

$$\dot{v}_2(t) = tv_1(t) \Rightarrow v_2(t) = \frac{1}{2}t^2 v_1(0) + v_2(0)$$

Assim, tem-se

$$v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \psi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \psi_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

e portanto uma matriz fundamental é dada por

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é  $-2$  para todo  $t$ .

### Propriedade

Dadas duas matrizes fundamentais  $\Psi_1(t)$  e  $\Psi_2(t)$  do sistema  $\dot{v} = A(t)v$ , existe um transformação linear  $T$  constante, não singular, tal que

$$\Psi_2(t) = \Psi_1(t)T$$

## Definição: Matriz Fundamental IV

Pois, como  $\Psi_1(t)$  e  $\Psi_2(t)$  são não singulares, existe  $T(t)$  não singular tal que

$$\Psi_2(t) = \Psi_1(t)T(t) \Rightarrow \dot{\Psi}_2(t) = \dot{\Psi}_1(t)T(t) + \Psi_1(t)\dot{T}(t)$$

$$\dot{\Psi}_2(t) = A(t)\Psi_2(t) = A(t)\Psi_1(t)T(t) = A(t)\Psi_1(t)T(t) + \Psi_1(t)\dot{T}(t) \Rightarrow \dot{T}(t) = 0$$

## Definição: Matriz de Transição de Estados I

A função matricial dada por

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$$

é a matriz de transição de estado de  $\dot{v} = A(t)v$  para a matriz fundamental  $\Psi(t)$ .

### Matriz de Transição

Propriedades:

- A matriz de transição de estados  $\Phi(t, t_0)$  é a solução única da equação

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \quad , \quad \Phi(t_0, t_0) = I$$

pois

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = \dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t_0) = A(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t_0) = I$$

## Definição: Matriz de Transição de Estados II

- A matriz de transição de estados  $\Phi(t, t_0)$  é invariante com a matriz fundamental, pois para duas matrizes fundamentais  $\Psi_1(t)$  e  $\Psi_2(t)$

$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t)T \Rightarrow \Phi(t, t_0) = \Psi_2(t)\Psi_2^{-1}(t_0) = \Psi_1(t)TT^{-1}\Psi_1^{-1}(t_0) = \Psi_1(t)\Psi_1^{-1}(t_0)$$

- $\Phi(t, t) = I, \forall t$
- $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t) = \Phi(t_0, t)$
- $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)$
- Para  $A(t) = A$  (sistema invariante no tempo), tem-se

$$\Phi(t, t_0) = \exp(A(t - t_0))$$

pois

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0) = A \exp(A(t - t_0)) = A\Phi(t, t_0)$$

## Definição: Matriz de Transição de Estados III

- $v(t) = \Phi(t, t_0)v(t_0)$  é solução de  $\dot{v}(t) = A(t)v(t)$ ,  $v(t_0)$  dado. De fato,

$$\dot{v}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0)v(t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)v(t_0) = A(t)v(t) \quad , \quad v(t_0) = \Phi(t_0, t_0)v(t_0)$$