IA888A — Análise de Sinais e de Sistemas Lineares

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Brasil

Sumário

Capítulo 1

Controlabilidade, Observabilidade e Estabilidade MIMO

Definição 1.1 (Representação por variáveis de estado de um sistema MIMO)
Sistemas MIMO podem ser descritos por equações de primeira ordem nas variáveis de estado. Assim

$$\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t) \quad , \quad y(t) = g(v(t), x(t), t) \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \ , \ x \in \mathbb{R}^p \ , \ y \in \mathbb{R}^q$$

As trajetórias $v(t)$, soluções da equação dinâmica, são unicamente determinadas a partir da condição inicial $v(0)$ e da entrada $x(t)$.
O sistema MIMO linear invariante no tempo é descrito pelas matrizes reais (A, B, C, D) e pelas equações de estado e de saída

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad y = Cv + Dx \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \ , \ x \in \mathbb{R}^p \ , \ y \in \mathbb{R}^q \tag{1.1}$$

□

Exemplo 1.1 (Circuito de segunda ordem)
As equações de estado para o circuito da Figura 1.1, na forma

$$\dot{v} = Av + Bx \ ; \ y = Cv + Dx \quad ; \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

sendo v_1 a tensão no capacitor e v_2 a corrente no indutor. A saída y_1 é a corrente no resistor e a saída y_2 é a corrente no indutor; $x_1(t)$ é uma fonte de corrente e $x_2(t)$ é uma fonte de tensão, são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -1/RC & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

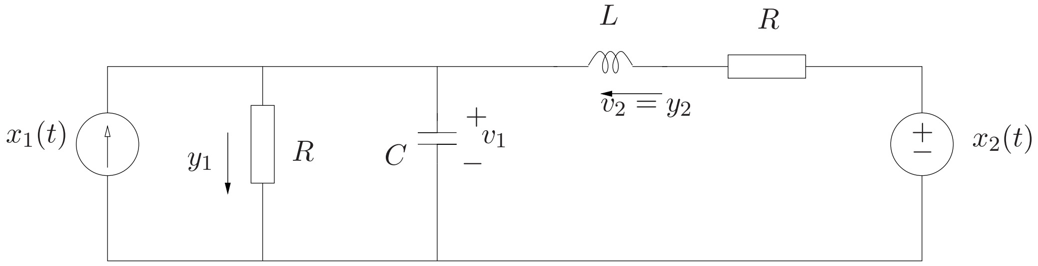


Figura 1.1: Circuito de segunda ordem excitado por fontes de tensão e de corrente.

–✶–

Definição 1.2 (Matriz resposta ao impulso de um sistema MIMO)
A matriz resposta ao impulso de um sistema MIMO linear invariante no tempo é a matriz formada pelas funções $h_{ij}(t)$, sendo $h_{ij}(t)$ a resposta na saída i ao impulso aplicado na entrada j com as demais entradas zeradas. □

A resposta ao impulso de sistemas descritos por equações diferenciais pressupõe condições iniciais nulas.

Definição 1.3 (Matriz de transferência de um sistema MIMO)
A matriz de transferência de um sistema MIMO linear invariante no tempo é a matriz formada pelas transformadas de Laplace das respostas ao impulso $h_{ij}(t)$. □

Propriedade 1.1 (Função de transferência)
A matriz de transferência do sistema (1.1) é dada por

$$H(s) = C(s\mathrm{I} - A)^{-1}B + D = \frac{1}{\det(s\mathrm{I} - A)} C\,\mathrm{Adj}(s\mathrm{I} - A)B + D$$

Observe que nem todo autovalor de A é pólo de $H(s)$, pois pode haver cancelamentos.
A matriz resposta ao impulso do sistema (causal) é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = C\exp(At)B + D\delta(t)$$

_◇_

Exemplo 1.2 (Função de transferência de segunda ordem)
A matriz de transferência do Exemplo 1.1, com $R = L = C = 1$,

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad y = Cv + Dx \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad D = 0$$

é dada por

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

com pólos $-1 \pm j$. A matriz de respostas ao impulso é dada por $[h_{ij}(t)]$ com

$$h_{11}(t) = h_{22}(t) = \exp(-t)\cos(t)u(t) \quad , \quad h_{12}(t) = -h_{21}(t) = \exp(-t)\mathrm{sen}(t)u(t)$$

_✷_

1.1 Controlabilidade

Definição 1.4 (Controlabilidade)
O sistema descrito pela equação de estado

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \ , \ x \in \mathbb{R}^p$$

é controlável (ou o par (A, B) é controlável) se para qualquer estado inicial $v(0)$ existir uma entrada $x(t)$, $t \in [0, \tau]$, que leva o estado de $v(0)$ para qualquer $v(\tau)$. □

A definição requer apenas que se possa mover qualquer estado inicial no espaço de estados para qualquer estado final em tempo finito (dado). Não há restrições quanto à trajetória a ser seguida nem quanto à magnitude da entrada. Note que a equação de saída não influencia a controlabilidade.

Propriedade 1.2 (Controlabilidade)
As condições a seguir são equivalentes.

- O par (A, B) é controlável.

- A matriz $W_c(t)$ é não-singular $\forall\ t > 0$, com

$$W_c(t) = \int_0^t \exp(A\beta)BB' \exp(A'\beta)d\beta$$

- A matriz de controlabilidade $\mathrm{Ctrb}(A,B)$ tem *rank* n (i.e. *rank* completo de linhas)

$$\mathrm{Ctrb}(A,B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times np}$$

- Para todo $\lambda \in \lambda(A)$ (e, portanto, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$), a matriz

$$\begin{bmatrix} (A - \lambda \mathrm{I}) & B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times(n+p)}$$

tem *rank* n (isto é, *rank* completo de linhas).

—◇—

Note que (basta fazer a mudança de variáveis $\beta = t - \xi$)

$$W_c(t) = \int_0^t \exp(A\beta)BB' \exp(A'\beta)d\beta = \int_0^t \exp\big(A(t-\xi)\big)BB' \exp\big(A'(t-\xi)\big)d\xi$$

e que o integrando garante que a matriz é sempre semidefinida positiva. A matriz $W_c(t)$ será definida positiva se e somente se for não singular.

Para provar que, se $W_c(t)$ for não singular, então (A,B) é controlável, tem-se que a resposta em termos do estado $v(t)$ no instante $t = t_1$ é dada por

$$v(t_1) = \exp(At_1)v(0) + \int_0^{t_1} \exp\big(A(t_1-\beta)\big)Bx(\beta)d\beta$$

Para qualquer $v(0) = v_0$ e qualquer $v(t_1) = v_1$, a entrada

$$x(t) = -B' \exp\big(A'(t_1 - t)\big)W_c^{-1}(t_1)\big(\exp(At_1)v_0 - v_1\big)$$

leva o estado de v_0 a v_1 no tempo t_1. De fato, substituindo

$$\begin{aligned} v(t_1) = \exp(At_1)v(0) - \left(\int_0^{t_1} \exp\big(A(t_1-\beta)\big)BB' \exp\big(A'(t_1-\beta)\big)d\beta\right)W_c^{-1}(t_1)\Big(\exp(At_1)v_0 - v_1\Big) \\ = \exp(At_1)v(0) - W_c(t_1)W_c^{-1}(t_1)\big(\exp(At_1)v_0 - v_1\big) = v_1 \end{aligned}$$

Como conclusão, se $W_c(t)$ é não singular então (A,B) é controlável.

Para mostrar o inverso, supõe-se por absurdo que o par é controlável mas $W_c(t_1)$ não é definida positiva para algum t_1. Nesse caso, existe $v \neq 0$ tal que

$$v'W_c(t_1)v = \int_0^{t_1} v' \exp\big(A(t_1-\beta)\big)BB' \exp\big(A'(t_1-\beta)\big)vd\beta = \int_0^{t_1} \|B' \exp\big(A'(t_1-\beta)\big)v\|^2 d\beta = 0$$

o que implica

$$B' \exp\big(A'(t_1-\beta)\big)v = 0\ ,\ v' \exp\big(A(t_1-\beta)\big)B = 0$$

para todo $\beta \in [0, t_1]$. Por outro lado, se o sistema é controlável, existe uma entrada que transfere o estado inicial de $v(0) = \exp(-At_1)v$ para $v(t_1) = 0$. Utilizando a expressão geral de $v(t)$ para esse caso tem-se

$$v(t_1) = 0 = v + \int_0^{t_1} \exp\big(A(t_1-\beta)\big)Bx(\beta)d\beta$$

Pré-multiplicando por v'

$$0 = v'v + \int_0^{t_1} v' \exp\big(A(t_1-\beta)\big)Bx(\beta)d\beta = \|v\|^2 + 0$$

o que contradiz a hipótese de que $v \neq 0$.

Propriedade 1.3 (Lyapunov e controlabilidade)
Considere A tal que todos os seus autovalores têm parte real negativa. Então, a equação

$$AP + PA' = -BB'$$

tem solução P única definida positiva se e somente se o par (A, B) for controlável.
Além disso, a solução (chamada gramiano de controlabilidade) pode ser expressa como

$$W_c = \int_0^{+\infty} \exp(A\beta)BB'\exp(A'\beta)d\beta$$

$\diamond$

Exemplo 1.3 (MIMO não controlável)
O sistema

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

possui A com autovalores -1 e -2. A solução da equação de Lyapunov é dada por

$$AP + PA' = -BB' = -\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = 0.5\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que é semi-definida positiva (menores principais líderes 0.5 e 0). Portanto, o sistema é não controlável. De fato, a matriz de controlabilidade é tal que

$$\text{Ctrb}(A,B) = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}\big(\text{Ctrb}(A,B)\big) = 1$$

$\ast$

Propriedade 1.4 (Controlabilidade e Forma de Jordan MIMO)
Um sistema MIMO é controlável se, para cada autovalor distinto, os vetores linha da matriz B correspondentes à última linha de cada bloco de Jordan associado a esse autovalor forem linearmente independentes.

$\diamond$

Exemplo 1.4

$$\dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} + \hat{B}x = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\hat{v} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}x$$

As linhas de B correspondentes às últimas linhas dos blocos de Jordan associados a λ_1 são linearmente independentes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A última linha de B associada a λ_2 é linearmente independente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, o par $(\hat{A}, \hat{B})$ é controlável.

$\ast$

1.2 Observabilidade

Definição 1.5 (Observabilidade)
O sistema descrito pelas equações

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = Cv \quad , \quad v \in \mathbb{R}^n \ , \ y \in \mathbb{R}^q$$

é observável (ou o par (A, C) é observável) se existir $\tau > 0$ tal que o conhecimento da saída $y(t)$ para todo $t \in [0, \tau]$ é suficiente para determinar a condição inicial $v(0)$.

□

Note que a entrada x não influencia a observabilidade.

Propriedade 1.5 (Observabilidade)
As condições a seguir são equivalentes.
• O par (A, C) é observável.
• A matriz $W_o(t)$ é não-singular $\forall \ t > 0$, com

$$W_o(t) = \int_0^t \exp(A'\beta)C'C\exp(A\beta)d\beta$$

• A matriz de observabilidade $\text{Obsv}(A, C)$ tem *rank* n (i.e. *rank* completo de colunas)

$$\text{Obsv}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{qn \times n}$$

• Para todo $\lambda \in \lambda(A)$ (e, portanto, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$), a matriz

$$\begin{bmatrix} (A - \lambda \mathrm{I}) \\ C \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+q) \times n}$$

tem *rank* n (isto é, *rank* completo de colunas).

—◇—

Propriedade 1.6 (Lyapunov e observabilidade)
Considere A tal que todos os seus autovalores têm parte real negativa. Então, a equação

$$A'P + PA = -C'C$$

tem solução P única definida positiva se e somente se o par (A, C) for observável.
Além disso, a solução (chamada gramiano de observabilidade) pode ser expressa como

$$W_o = \int_0^{+\infty} \exp(A'\beta)C'C\exp(A\beta)d\beta$$

—◇—

Exemplo 1.5 (MIMO não observável)
O sistema

$$\dot{v} = Ax \quad , \quad y = Cv \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

possui A com autovalores -1 e -2. A solução da equação de Lyapunov é dada por

$$A'P + PA = -C'C = -\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

que é semi-definida positiva (menores principais líderes 0.5 e 0). Portanto, o sistema é não observável. De fato, a matriz de observabilidade é tal que

$$\mathrm{Obsv}(A,C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rank}\big(\mathrm{Obsv}(A,C)\big) = 1$$

_✷_

Propriedade 1.7 (Observabilidade e Forma de Jordan MIMO)
Um sistema MIMO é observável se, para cada autovalor distinto, os vetores coluna da matriz C correspondentes à primeira coluna de cada bloco de Jordan associado a esse autovalor forem linearmente independentes.

_◇_

Exemplo 1.6

$$\dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \hat{v} \quad , \quad y = \hat{C}\hat{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \hat{v}$$

As colunas de C associadas às primeiras colunas dos blocos de Jordan associados a λ_1 são linearmente independentes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A primeira coluna de C associada a λ_2 é nula

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, o par $(\hat{A}, \hat{C})$ é não observável.

_✷_

1.3 Estabilidade

Definição 1.6
Um sistema MIMO (*Multiple-Inputs Multiple-Outputs*) é BIBO (*Bounded-Input Bounded-Output*) estável se entradas limitadas produzem saídas limitadas. □

Propriedade 1.8
Um sistema MIMO linear invariante no tempo é BIBO estável se e somente todo $h_{ij}(t)$ (resposta ao impulso) for absolutamente integrável.

_◇_

Propriedade 1.9
Um sistema MIMO linear invariante no tempo é BIBO estável se e somente todos os pólos da matriz de transferência possuírem parte real estritamente negativa.

_◇_

Propriedade 1.10 (Estabilidade e controlabilidade)
Para qualquer matriz B tal que

$$\mathrm{rank}\big(\mathrm{Ctrb}(A,B)\big) = \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = n$$

a solução da equação de Lyapunov

$$AP + PA' = -BB'$$

é única, simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

_◇_

Propriedade 1.11 (Estabilidade e observabilidade)
Para qualquer matriz C tal que

$$\text{rank}\big(\text{Obsv}(A,C)\big) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

a solução da equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -C'C$$

é única, simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.
Prova:

Primeiramente, mostra-se que se A possui autovalores com parte real negativa e o par (A, C) é observável, então a solução é única, simétrica e definida positiva.

• A solução P é única (autovalores de A são tais que $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$).

• A solução pode ser expressa como

$$P = \int_0^\infty \exp(A't)C'C\exp(At)dt$$

• Como $C'C$ é simétrica, P também o é.

• Note que $C'C$ é semi-definida positiva.

Para $v \neq 0$, tem-se

$$v'Pv = \int_0^{+\infty} v'\exp(A't)C'C\exp(At)v \ dt = \int_0^{+\infty} \|C\exp(At)v\|^2 dt \geq 0$$

e portanto P é pelo menos semi-definida positiva. Por absurdo, suponha que P não é definida positiva, isto é, existe $v \neq 0$ tal que

$$v'Pv = 0 \quad \Rightarrow \quad C\exp(At)v = 0 \ \forall t$$

Derivando $n-1$ vezes em relação ao tempo, tem-se

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \exp(At)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank}\big(\text{Obsv}(A,C)\big) < n$$

o que contraria a hipótese de que o par (A, C) é observável. Portanto, P é definida positiva.

Agora, prova-se que se $P = P' > 0$, então A possui todos os autovalores com parte real negativa.
Pré multiplicando a equação de Lyapunov por $(v^*)'$ e pós multiplicando por v, com v autovetor de A associado ao autovalor λ, tem-se

$$(v^*)'A'Pv + (v^*)'PAv = (\lambda^* + \lambda)(v^*)'Pv = 2\text{Re}(\lambda)(v^*)'Pv = -(v^*)'C'Cv = -\|Cv\|_2^2$$

Como $(v^*)'Pv$ é positivo, basta provar que o vetor Cv é não nulo. De fato, como

$$\text{Obsv}(A,C)v = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} Cv \\ \lambda Cv \\ \vdots \\ \lambda^{n-1}Cv \end{bmatrix}$$

o *rank* completo da matriz de observabilidade garante que $Cv \neq 0$.

—◇—

Exemplo 1.7
O sistema

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad y = Cv \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 3 & 1.5 \end{bmatrix}$$

é tal que

$$rank\big(\text{Ctrb}(A,B)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & -5 \end{bmatrix} = 2$$

A solução da equação de Lyapunov é dada por

$$AP + PA' = -BB' = -\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

que é definida positiva, pois os menores principais líderes são positivos (3 e 2), portanto o sistema é assintoticamente estável. De fato, os autovalores de A são -1 e -2.

A solução da equação de Lyapunov é dada por

$$A'P + PA = -C'C = -\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 2.5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 5 & 2.5 \\ 2.5 & 1.25 \end{bmatrix}$$

que é semi definida positiva, pois os menores principais líderes são (5 e 0). Nesse caso o par (A, C) é não observável, pois

$$\text{Obsv(A,C)} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 3 & 1.5 \\ -1 & -0.5 \\ -3 & -1.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank(Obsv(A,C))} = 1$$

e, dessa forma, o teste falha para decidir se o sistema é assintoticamente estável ou não.

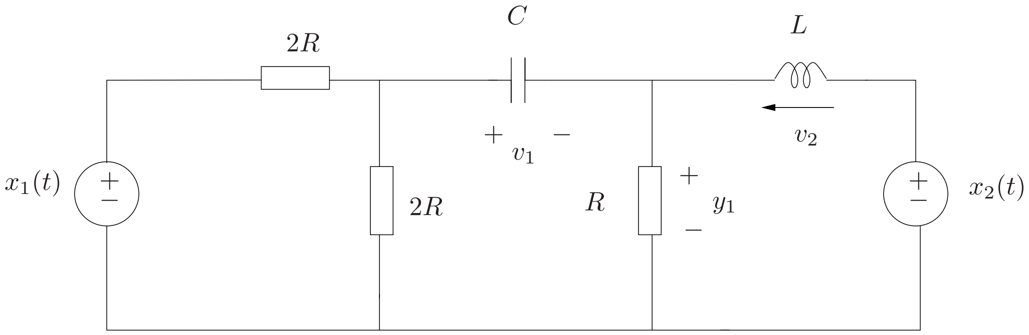
—✷—

1.4 Exercícios

Exercício 1.1
a) Obtenha as equações de estado para o circuito abaixo, na forma

$$\dot{v} = Av + Bx \; ; \; y = Cv + Dx \quad , \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

sendo as saídas y_1 a tensão no resistor, $y_2 = v_1$ a tensão no capacitor e $x_1(t)$, $x_2(t)$ fontes de tensão.



b) Considerando $R = C = L = 1$, determine a matriz de transferência $H(s)$

✣

Exercício 1.2
Considere o sistema (na forma de Jordan)

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \beta \\ \beta & 1 & 4 \\ -4 & \beta & -1 \\ \beta-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & \beta & 0 & 1 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\beta & \beta & -5 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Determine os valores de β para os quais o sistema não é controlável nem observável.

✣

Exercício 1.3
Considere (na forma de Jordan)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & \beta & 0 \\ \beta-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & \beta & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\beta & 1 & \beta & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \beta & 0 & 1 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Determine os valores de β para os quais o sistema não é controlável nem observável.

✣

Exercício 1.4
Considere o sistema (na forma de Jordan):

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \beta & 1 \\ \beta-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\alpha & 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & \alpha & 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} v$$

a) Determine os valores de β para os quais o sistema não é controlável.

b) Determine os valores de α para os quais o sistema não é observável.

✣

Exercício 1.5
Considere o sistema (na forma de Jordan)

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 1 \\ \beta & 1 & -5 \\ \beta & 1 & 4 \\ -4 & \beta & -1 \\ 0 & \beta & 6 \\ 0 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 & 1 & \alpha & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha & -5 & 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

a) Determine os valores de β para os quais o sistema não é controlável

b) Determine os valores de α para os quais o sistema não é observável

Solução:

$$\beta = -2 \ , \ \beta = -3 \quad , \quad \alpha = -1 \ , \ \alpha = -2$$

✣

Capítulo 2

Realimentação de Estados

2.1 Sistemas SISO

Considere o sistema linear de dimensão n sem transmissão direta (i.e. $d = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Av + bx \\ y &= cv \end{aligned}$$

Na realimentação de estados, a entrada x é dada por

$$x = r - kv = r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} v$$

sendo r um sinal de referência, resultando em

$$\dot{v} = (A - bk)v + br$$

Propriedade 2.1
O par $(A - bk, b)$ é controlável para qualquer vetor $k \in \mathbb{R}^{1\times n}$ se e somente se o par (A, b) também for controlável.

Prova:
Considere $n = 4$ e as matrizes de controlabilidade

$$\mathrm{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Ctrb}(A - bk, b) = \begin{bmatrix} b & (A - bk)b & (A - bk)^2b & (A - bk)^3b \end{bmatrix}$$

Note que

$$\mathrm{Ctrb}(A - bk, b) = \mathrm{Ctrb}(A, b) \begin{bmatrix} 1 & -kb & -k(A - bk)b & -k(A - bk)^2b \\ 0 & 1 & -kb & -k(A - bk)b \\ 0 & 0 & 1 & -kb \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz à direita é não singular para qualquer k. Portanto, o *rank* de $\mathrm{Ctrb}(A - bk, b)$ é igual ao de $\mathrm{Ctrb}(A, b)$.
Esse resultado também pode ser demonstrado pela definição de controlabilidade. Considere v_0 e v_1 arbitrários. Se o sistema original é controlável, existe x_1 que leva de v_0 a v_1 em tempo finito. A entrada $r_1 = x_1 + kv$, leva o sistema controlado de v_0 a v_1.

Note também que r não controla o estado diretamente; r gera a entrada x que é usada para controlar v. Portanto, se x não controla o estado v, r também não controla.

—⋄—

Exemplo 2.1
Pela Propriedade 2.1, a controlabilidade é invariante sob qualquer realimentação de estados, porém a observabilidade pode ser afetada. Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} v$$

que é controlável e observável em malha aberta, pois as matrizes

$$\mathrm{Ctrb}(A,b) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{Obsv}(A,c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

possuem *rank* igual a 2. Definindo a realimentação de estados

$$x = r - \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} v$$

tem-se o sistema de malha fechada

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

com as matrizes de controlabilidade e observabilidade dadas por

$$\mathrm{Ctrb}(A-bk,b) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{rank} = 2 \quad , \quad \mathrm{Obsv}(A,c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{rank} = 1$$

e portanto o sistema em malha fechada é não observável.

_✷_

Exemplo 2.2
Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x \quad , \quad x = r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} v$$

cujo polinômio característico é dado por

$$\Delta(s) = (s-4)(s+2)$$

Com a realimentação de estados, tem-se o sistema em malha fechada

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1-k_1 & 3-k_2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

e o polinômio característico

$$\Delta_f(s) = s^2 + (k_1-2)s + (3k_2 - k_1 - 8)$$

A escolha de k_1 e k_2 permite alocar arbitrariamente os autovalores do sistema em malha fechada.

_✷_

Propriedade 2.2
Considere o sistema de dimensão $n = 4$

$$\dot{v} = Av + bx$$
$$y = cv$$

cujo polinômio característico é dado por

$$\Delta(s) = \det(s\mathrm{I} - A) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Se o sistema é controlável, então existe uma transformação $v = T\hat{v}$ com

$$T = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que leva o sistema à forma canônica controlável

$$\dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} + \hat{b}x = \begin{bmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \hat{c}\hat{v} = \begin{bmatrix} \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \hat{v}$$

Além disso, a função de transferência do sistema é dada por

$$H(s) = \frac{\beta_3 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0}{s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Prova:
Considere $\mathrm{Ctrb}(A, b)$ a matriz de controlabilidade do sistema original e $\mathrm{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})$ a do sistema transformado, com $\hat{A} = T^{-1}AT$, $\hat{b} = T^{-1}b$.
A controlabilidade é invariante com a transformação de similaridade e, para um sistema controlável, tem-se

$$\mathrm{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) = T^{-1}\mathrm{Ctrb}(A, b) \quad \Rightarrow \quad T = \mathrm{Ctrb}(A, b)\mathrm{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})^{-1}$$

A matriz de controlabilidade do sistema transformado é dada por

$$\mathrm{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_3 & \alpha_3^2 - \alpha_2 & -\alpha_3^3 + 2\alpha_3\alpha_2 - \alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 & \alpha_3^2 - \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é

$$\mathrm{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como conclusão, $T = \mathrm{Ctrb}(A, b)\mathrm{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})^{-1}$ é a matriz de transformação de similaridade.
Note que a função de transferência do sistema transformado é dada por

$$H(s) = \hat{c}(s\mathrm{I} - \hat{A})^{-1}\hat{b} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^3 \\ s^2 \\ s \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \Delta(s) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

que, por sua vez, é também a função de transferência do sistema original.

_◇_

Propriedade 2.3
Se o sistema

$$\dot{v} = Av + bx$$
$$y = cv$$

é controlável, então com a realimentação de estados $x = r - kv$ pode-se alocar arbitrariamente os autovalores de $A - bk$ (desde que autovalores complexos apareçam em pares complexo conjugados).

Prova:
Conside $n = 4$. Se o sistema é controlável, então pode ser colocado na forma canônica

$$\dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} + \hat{b}x = \begin{bmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \hat{c}\hat{v} = \begin{bmatrix} \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \hat{v}$$

com $\hat{A} = T^{-1}AT$ e $\hat{b} = T^{-1}b$. Substituindo $v = T\hat{v}$ na lei de controle, tem-se

$$x = r - kv = r - kT\hat{v} = r - \hat{k}\hat{v} \quad , \quad \hat{k} = kT$$

Como $\hat{A} - \hat{b}\hat{k} = T^{-1}(A - bk)T$, as matrizes $(A - bk)$ e $(\hat{A} - \hat{b}\hat{k})$ são similares (têm os mesmos autovalores).

Especificados os autovalores do sistema em malha fechada, pode-se formar o polinômio característico do sistema em malha fechada

$$\Delta_f(s) = s^4 + \bar{\alpha}_3 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_1 s + \bar{\alpha}_0$$

Se $\hat{k}$ é escolhido

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_3 - \alpha_3 & \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 & \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 & \bar{\alpha}_0 - \alpha_0 \end{bmatrix}$$

a equação dinâmica em malha fechada fica

$$\dot{\hat{v}} = (\hat{A} - \hat{b}\hat{k})\hat{x} + \hat{b}r = \begin{bmatrix} -\bar{\alpha}_3 & -\bar{\alpha}_2 & -\bar{\alpha}_1 & -\bar{\alpha}_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

e o polinômio característico de $(A - bk)$ (que é igual ao de $(\hat{A} - \hat{b}\hat{k})$) é dado por $\Delta_f(s)$.

O ganho de realimentação de estados k que faz a alocação desejada pode ser computado

$$k = \hat{k}T^{-1} = \hat{k}\mathrm{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b})\mathrm{Ctrb}(A, b)^{-1}$$

—◇—

Exemplo 2.3
Considere o modelo linearizado de um pêndulo invertido

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v$$

Trata-se de um sistema controlável, cujo polinômio característico é

$$\Delta(s) = s^2(s^2 - 5) = s^4 + 0s^3 - 5s^2 + 0s + 0$$

Construindo a transformação de similaridade que coloca o sistema na forma canônica controlável

$$T = \mathrm{Ctrb}(A,b)\mathrm{Ctrb}(\hat{A},\hat{b})^{-1}$$

com

$$\mathrm{Ctrb}(A,b) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{Ctrb}(\hat{A},\hat{b})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A alocação desejada $(-1.5 \pm 0.5j,\ -1 \pm j)$ produz o polinômio característico em malha fechada

$$\Delta_f(s) = (s+1.5-0.5j)(s+1.5+0.5j)(s+1-j)(s+1+j) = s^4 + 5s^3 + 10.5s^2 + 11s + 5$$

e o ganho $\hat{k}$ é dado por

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} (5-0) & (10.5+5) & (11-0) & (5-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15.5 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

implicando em

$$k = \hat{k}T^{-1} = \begin{bmatrix} -5/3 & -11/3 & -103/12 & -13/3 \end{bmatrix}$$

_✷_

Propriedade 2.4
(Fórmula de Ackermann)
Considere o sistema de dimensão n

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Av + bx \\ y &= cv \end{aligned}$$

O ganho $k \in \mathbb{R}^{1\times n}$ da lei de controle $x = r - kv$ que aloca os autovalores de $A - bk$ nas raízes do polinômio $\Delta_f(s)$ é dado por

$$k = e_n' \mathrm{Ctrb}(A,b)^{-1}\Delta_f(A) \quad , \quad e_n' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Prova:
Considere $n = 4$, a matriz de controlabilidade do sistema original

$$\mathrm{Ctrb}(A,b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}$$

e o sistema transformado $v = T\hat{v}$ com

$$T = \mathrm{Ctrb}(A,b)\begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que possui a forma canônica controlável

$$\dot{\hat{v}} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\hat{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix}\hat{v}$$

A relação entre a matriz de controlabilidade do sistema original e a do transformado é dada por

$$\mathrm{Ctrb}(\hat{A},\hat{b}) = T^{-1}\mathrm{Ctrb}(A,b) \quad , \quad T = \mathrm{Ctrb}(A,b)\mathrm{Ctrb}(\hat{A},\hat{b})^{-1}$$

com

$$\mathrm{Ctrb}(\hat{A},\hat{b}) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_3 & \alpha_3^2-\alpha_2 & -\alpha_3^3+2\alpha_3\alpha_2-\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_3 & \alpha_3^2-\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No caso geral, a última linha da matriz $\mathrm{Ctrb}(\hat{A},\hat{b})$ tem a forma

$$e_n' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Para a alocação desejada, define-se o polinômio característico do sistema em malha fechada

$$\Delta_f(s) = s^4 + \bar{\alpha}_3 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_1 s + \bar{\alpha}_0$$

que deve ser igualado com

$$\det(s\mathrm{I} - \hat{A} + \hat{b}\hat{k}) = s^4 + (\alpha_3+\hat{k}_1)s^3 + (\alpha_2+\hat{k}_2)s^2 + (\alpha_1+\hat{k}_3)s + (\alpha_0+\hat{k}_4)$$

e, portanto,

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_3-\alpha_3 & \bar{\alpha}_2-\alpha_2 & \bar{\alpha}_1-\alpha_1 & \bar{\alpha}_0-\alpha_0 \end{bmatrix}$$

Como, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, toda matriz dinâmica satisfaz sua equação característica, tem-se

$$\hat{A}^n + \alpha_{n-1}\hat{A}^{n-1} + \alpha_{n-2}\hat{A}^{n-2} + \cdots + \alpha_1\hat{A} + \alpha_0\mathrm{I} = 0$$

Utilizando os coeficientes do polinômio de malha fechada, pode-se formar o polinômio

$$\Delta_f(\hat{A}) = \hat{A}^n + \bar{\alpha}_{n-1}\hat{A}^{n-1} + \bar{\alpha}_{n-2}\hat{A}^{n-2} + \cdots + \bar{\alpha}_0\mathrm{I}$$

Substituindo-se $\hat{A}^n$ obtido a partir da equação característica, tem-se

$$\Delta_f(\hat{A}) = (\bar{\alpha}_{n-1}-\alpha_{n-1})\hat{A}^{n-1} + (\bar{\alpha}_{n-2}-\alpha_{n-2})\hat{A}^{n-2} + \cdots + (\bar{\alpha}_0-\alpha_0)\mathrm{I}$$

Levando em conta a estrutura particular de $\hat{A}$, observa-se que

$$e_n'\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = e_{n-1}'$$

e conseqüentemente

$$(e_n'\hat{A})\hat{A} = e_n'\hat{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_{n-2}'$$

implicando

$$e_n'\hat{A}^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = e_1'$$

Portanto, multiplicando $\Delta_f(\hat{A})$ por e_n', tem-se

$$\begin{aligned} e_n'\Delta_f(\hat{A}) &= (\bar{\alpha}_{n-1}-\alpha_{n-1})e_1' + (\bar{\alpha}_{n-2}-\alpha_{n-2})e_2' + \cdots + (\bar{\alpha}_0-\alpha_0)e_n' \\ &= \hat{k}_1 e_1' + \hat{k}_2 e_2' + \cdots + \hat{k}_n e_n' = \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & \hat{k}_2 & \cdots & \hat{k}_n \end{bmatrix} = \hat{k} \end{aligned}$$

Como $k = \hat{k}T^{-1}$ e $T^{-1} = \mathrm{Ctrb}(\hat{A},\hat{b})\mathrm{Ctrb}(A,b)^{-1}$, tem-se

$$k = e_n'\Delta_f(\hat{A})T^{-1} = e_n'\Delta_f(T^{-1}AT)T^{-1} = e_n'T^{-1}\Delta_f(A) = e_n'\mathrm{Ctrb}(\hat{A},\hat{b})\mathrm{Ctrb}(A,b)^{-1}\Delta_f(A)$$

ou, como $e_n' \text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{b}) = e_n'$, chega-se a

$$k = e_n' \text{Ctrb}(A, b)^{-1} \Delta_f(A)$$

$\_\diamond\_$

Propriedade 2.5 (Cômputo do ganho k pela equação de Lyapunov)
Considere o sistema de dimensão n

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad x = r - kv$$

Se o par (A, b) for controlável, a determinação de um ganho k tal que $(A - bk)$ tenha os autovalores desejados (desde que não coincidam com nenhum dos autovalores de A) pode ser feita a partir da equação de Lyapunov:

1. Escolha uma matriz $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com os autovalores desejados;
2. Escolha $\hat{k}$ arbitrário tal que $(F, \hat{k})$ seja observável;
3. Obtenha a solução única T da equação de Lyapunov
$$AT - TF = b\hat{k}$$
4. O ganho k é dado por
$$k = \hat{k}T^{-1}$$

Prova:
Para T não singular, $\hat{k} = kT$ e $AT - TF = b\hat{k}$ implicam

$$(A - bk)T = TF \quad \Leftrightarrow \quad (A - bk) = TFT^{-1}$$

e portanto $(A - bk)$ e F são similares (mesmos autovalores). Se A e F não têm autovalores comuns, existe uma única solução T para qualquer $\hat{k}$. Caso A e F tenham algum autovalor comum, a solução T pode existir ou não (depende de $b\hat{k}$).

Se A e F não têm autovalores em comum, então a única solução de $AT - TF = b\hat{k}$ é não-singular se e somente se (A, b) é controlável e $(F, \hat{k})$ é observável.
Para verificar essa afirmação, considere $n = 4$ e o polinômio característico de A dado por

$$\Delta(s) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se

$$\Delta(A) = A^4 + \alpha_3 A^3 + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 \mathrm{I} = 0$$

Considere agora o polinômio matricial $\Delta(F)$

$$\Delta(F) = F^4 + \alpha_3 F^3 + \alpha_2 F^2 + \alpha_1 F + \alpha_0 \mathrm{I}$$

e note que, se $\hat{\lambda}_i$ é um autovalor de F, então $\Delta(\hat{\lambda}_i)$ é um autovalor de $\Delta(F)$, pois

$$F\nu = \hat{\lambda}_i \nu \ , \ F^2\nu = F\hat{\lambda}_i\nu = \hat{\lambda}_i^2 \nu$$

$$\Delta(F)\nu = (F^4 + \alpha_3 F^3 + \alpha_2 F^2 + \alpha_1 F + \alpha_0 \mathrm{I})\nu = (\hat{\lambda}_i^4 + \alpha_3 \hat{\lambda}_i^3 + \alpha_2 \hat{\lambda}_i^2 + \alpha_1 \hat{\lambda}_i + \alpha_0 \mathrm{I})\nu = \Delta(\hat{\lambda}_i)\nu$$

Como A e F não têm autovalores em comum, $\Delta(\hat{\lambda}_i) \neq 0$ para todo autovalor de F.
Além disso, como o determinante de uma matriz é igual ao produto de seus autovalores, tem-se

$$\det \Delta(F) = \prod_i \Delta(\hat{\lambda}_i) \neq 0$$

e portanto $\Delta(F)$ é não singular.
Substituindo $AT = TF + b\hat{k}$ em $A^2T - TF^2$, tem-se

$$A^2T - TF^2 = A(TF + b\hat{k}) - TF^2 = Ab\hat{k} + (AT - TF)F = Ab\hat{k} + b\hat{k}F$$

De maneira similar, obtém-se o conjunto de equações

$$\begin{array}{rcl} IT - TI & = & 0 \\ AT - TF & = & b\hat{k} \\ A^2T - TF^2 & = & Ab\hat{k} + b\hat{k}F \\ A^3T - TF^3 & = & A^2b\hat{k} + Ab\hat{k}F + b\hat{k}F^2 \\ A^4T - TF^4 & = & A^3b\hat{k} + A^2b\hat{k}F + Ab\hat{k}F^2 + b\hat{k}F^3 \end{array}$$

Multiplicando a primeira equação por α_0, a segunda por α_1, a terceira por α_2, a quarta por α_3, a última por 1, e somando todas, tem-se (lembrando que $\Delta(A) = 0$)

$$\Delta(A)T - T\Delta(F) = -T\Delta(F) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k} \\ \hat{k}F \\ \hat{k}F^2 \\ \hat{k}F^3 \end{bmatrix}$$

Se (A, b) é controlável e $(F, \hat{k})$ é observável, as matrizes acima são não-singulares, e como $\Delta(F) \neq 0$, necessariamente T é não singular.

_◇_

Para a determinação de um ganho de realimentação de estados utilizando a equação de Lyapunov, é necessário escolher F e $\hat{k}$. Por exemplo, F na forma companheira e

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou F na forma modal e $\hat{k}$ com ao menos um elemento diferente de zero associado a cada bloco diagonal (para garantir a observabilidade do par $(F, \hat{k})$.

Exemplo 2.4
Considere novamente o modelo linear para o pêndulo invertido e a alocação $-1.5 \pm 0.5j$ e $-1 \pm j$.
Escolhendo F na forma modal

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e resolvendo com o Matlab, tem-se

$$k = \begin{bmatrix} -1.6667 & -3.6667 & -8.5833 & -4.3333 \end{bmatrix}$$

_✶_

Note que o ganho (para uma dada alocação) é único em sistemas SISO. Os comandos do Matlab `place` (se os autovalores forem distintos) ou `acker` podem ser usados para o cômputo de k.

Propriedade 2.6
Um sistema não controlável, descrito pelo par (A, b), pode ser escrito por meio de uma transformação de similaridade na forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x$$

_◇_

Propriedade 2.7 (Sistemas estabilizáveis)
A alocação arbitrária dos autovalores de $A - bk$ só pode ser feita se o par (A, b) for controlável, pois os modos não controláveis não são afetados pelo ganho k.
O sistema é denominado estabilizável se todos os modos não controláveis forem estáveis.

Prova:
Considere um sistema não controlável (isto é, nem todos os autovalores podem ser arbitrariamente alocados em malha fechada). A equação de estado pode ser transformada em

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x$$

com $(\bar{A}_c, \bar{b}_c)$ controlável. Como a matriz $\bar{A}$ é bloco triangular, os autovalores de A são os autovalores das matrizes $\bar{A}_c$ e $\bar{A}_{\bar{c}}$.
A realimentação de estado

$$x = r - \hat{k}\bar{v} = r - \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & \hat{k}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

produz o sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{b}_c\hat{k}_1 & \bar{A}_{12} - \bar{b}_c\hat{k}_2 \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Os autovalores de $\bar{A}_{\bar{c}}$ não são afetados pela realimentação de estado. Se $\bar{A}_{\bar{c}}$ é estável, o sistema é estabilizável.

$\_\diamond\_$

2.2 Sistemas MIMO

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Av + Bx \\ y &= Cv \end{aligned}$$

Com a realimentação de estado dada por

$$x = r - Kv \quad , \quad K \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \dot{v} &= (A - BK)v + Br \\ y &= Cv \end{aligned}$$

Propriedade 2.8
O par $(A - BK, B)$ é controlável para qualquer $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$ se e somente se o par (A, B) for controlável.

$\_\diamond\_$

Propriedade 2.9
Os autovalores de $(A - BK)$ podem ser arbitrariamente alocados (desde que os autovalores complexos apareçam em pares conjugados) pela escolha apropriada de K se e somente se (A, B) for controlável.

$\_\diamond\_$

Projeto cíclico

O problema MIMO é transformado em um problema SISO e então aplica-se o resultado de alocação de sistemas monovariáveis.

Definição 2.1 (Matriz cíclica)
Uma matriz A é cíclica se seu polinômio mínimo é igual ao polinômio característico. O polinômio mínimo de A é o polinômio $\Delta_m(\lambda)$ de menor grau tal que $\Delta_m(A) = 0$.

Em termos da forma de Jordan, uma matriz é cíclica se e somente se houver um único bloco de Jordan associado a cada autovalor distinto.

□

Propriedade 2.10
Se o par (A, B) é controlável e A é cíclica, então para quase todo vetor $\xi \in \mathbb{R}^{p\times 1}$, o par $(A, B\xi)$ é controlável.

Prova:
Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ B\xi = B \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \alpha \\ \times \\ \beta \end{bmatrix}$$

Há apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor e portanto A é cíclica; a condição para que o par (A, B) seja controlável é que a terceira e a última linhas de B sejam não nulas.
A condição para que $(A, B\xi)$ seja controlável é que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Como

$$\alpha = \xi_1 + 2\xi_2 \quad , \quad \beta = \xi_2$$

ou α ou β valem zero se e somente se $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ou $\xi_1 = -2\xi_2$. Qualquer outra escolha do vetor ξ torna o par $(A, B\xi)$ controlável.

A condição de que a matriz A seja cíclica é essencial. Por exemplo, o sistema

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é controlável mas não existe ξ tal que $(A, B\xi)$ seja controlável.

Note que possuir autovalores distintos é uma condição suficiente para a matriz A ser cíclica.

_◇_

Propriedade 2.11
Se (A, B) é controlável, então para quase toda matriz constante $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$, a matriz $(A - BK)$ tem autovalores distintos e, conseqüentemente, é cíclica.

Prova: considere $n = 4$ e o polinômio característico de $A - BK$

$$\Delta_f(s) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

cujos coeficientes são funções dos elementos k_{ij} da matriz K.

Se $A - BK$ tiver autovalores (que são raízes de $\Delta_f(s)$) iguais, então esses autovalores também são raízes do polinômio que é a derivada de $\Delta_f(s)$

$$\Delta_f'(s) = 4s^3 + 3\alpha_3 s^2 + 2\alpha_2 s + a_1$$

Se $\Delta_f(s)$ e $\Delta'_f(s)$ têm raízes comuns, então os polinômios não são coprimos. A condição necessária e suficiente para que os polinômios não sejam coprimos é que a matriz de Sylvester associada seja singular, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 2\alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 3\alpha_3 & \alpha_1 & 2\alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 4 & \alpha_2 & 3\alpha_3 & \alpha_1 & 2\alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \alpha_3 & 4 & \alpha_2 & 3\alpha_3 & \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_3 & 4 & \alpha_2 & 3\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = f(k_{ij}) = 0$$

Entre todas as possíveis escolhas para k_{ij}, há pouca probabilidade de que $f(k_{ij}) = 0$.

$\_\diamond\_$

O procedimento para a alocação dos autovalores de $(A - BK)$ é dado por:

- Se A não for cíclica, introduzir a realimentação $x = w - K_1 v$ tal que $\bar{A} = A - BK_1$ seja cíclica.

$$\dot{v} = (A - BK_1)v + Bw = \bar{A}v + Bw$$

- Como (A, B) é controlável, $(\bar{A}, B)$ também o é. Assim, existe um vetor ξ tal que $(\bar{A}, B\xi)$ é controlável.

- Determine o ganho $k \in \mathbb{R}^{1\times n}$ que aloca os autovalores de $\bar{A} - B\xi k$ nas posições desejadas e define a lei de controle para o sistema transformado

$$w = r - K_2 v \ , \ K_2 = \xi k$$

  A lei de controle do sistema original é dada por

$$x = r - (K_1 + K_2)v = r - Kv$$

2.3 Exercícios

Exercício 2.1
Considere o sistema linear dado por

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) O sistema é controlável?

b) O sistema é estabilizável (isto é, existe um controle $x = r - kv$ que estabiliza o sistema)?

c) Determine (se possível) k, isto é, uma lei de realimentação de estados $x = r - kv$ que aloque os autovalores em malha fechada em -1, -2.

d) Determine (se possível) $g \in \mathbb{R}$, isto é, uma lei de realimentação de saídas $x = r - gy$ que aloque os autovalores em malha fechada em -1, -2.

✣

Exercício 2.2
Considere o sistema linear dado por

$$\dot{v} = Av + Bx, \quad y = cv$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) O sistema é controlável?

b) O sistema é observável?

c) Determine (se for possível) uma realimentação de estados $x = r - Kv$ tal que os pólos da função de transferência em malha fechada estejam todos em -1

✣

Exercício 2.3
Considere o sistema linear dado por

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine uma realimentação de estados $x = r - kv$ que torne o sistema em malha fechada não observável.

✣

Exercício 2.4
Considere

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \ , \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine (se possível) um ganho de realimentação de saídas $k \in \mathbb{R}$ tal que a lei de controle $x = r - ky$ estabilize o sistema em malha fechada.

b) Determine o ganho de realimentação de estados $k \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ tal que a lei de controle $x = r - Kv$ aloque os autovalores do sistema em malha fechada $A - bk$ em -1 e -2.

✣

Exercício 2.5
Considere

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -9 & -8 \end{bmatrix} \ , \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a) O sistema é controlável?

b) O sistema é estabilizável?

c) Determine (se possível) um ganho de realimentação de estados $k \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ para que o controle $x = r - Kv$ aloque os autovalores do sistema em malha fechada $A - bk$ em -2 e -3

d) Determine (se possível) um ganho de realimentação de saídas $k \in \mathbb{R}$ (escalar) para que o controle $x = r - ky$ aloque os autovalores do sistema em malha fechada $A - bkc$ em -2 e -3

✣

Exercício 2.6
Considere

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ ; \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine o ganho de realimentação de estados $K \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que a lei de controle $x = r - Kv$ aloque os autovalores do sistema em malha fechada $A - BK$ em -1 e -2.

✣

Exercício 2.7
Considere o sistema dado por

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -11 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine um ganho de realimentação de estados que aloque os autovalores de $A - BK$ em -2 e -3, na forma:

a) $K = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ b) $K = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$

✣

Exercício 2.8
Considere o sistema linear descrito por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = Cv \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine uma realimentação de estados $x = -kv$, $k \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ que aloque os autovalores do sistema em malha fechada $A - bk$ em $-1, -2, -3$.

b) Determine, se possível, uma realimentação de saída $x = -ky$, $k \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ que aloque os autovalores do sistema em malha fechada $A - bkC$ em $-1, -2, -3$.

✣

Capítulo 3

Observadores de Estado

A realimentação de estados pressupõe que os estados v são disponíveis, o que nem sempre é possível. Além disso, pode existir limitação quanto ao número de sensores ou medidores no sistema.
Quando os estados não estão disponíveis, observadores de estado podem ser utilizados para estimar os valores de v. Observadores são estimadores do estado para sistemas determinísticos.

3.1 Sistemas SISO

A Figura 3.1 apresenta o observador de estados como proposto por Luenberger[1] em 1964 [6]. Note que supõe-se o conhecimento da entrada e da saída do sistema, e também que o modelo representa de maneira acurada o sistema físico.

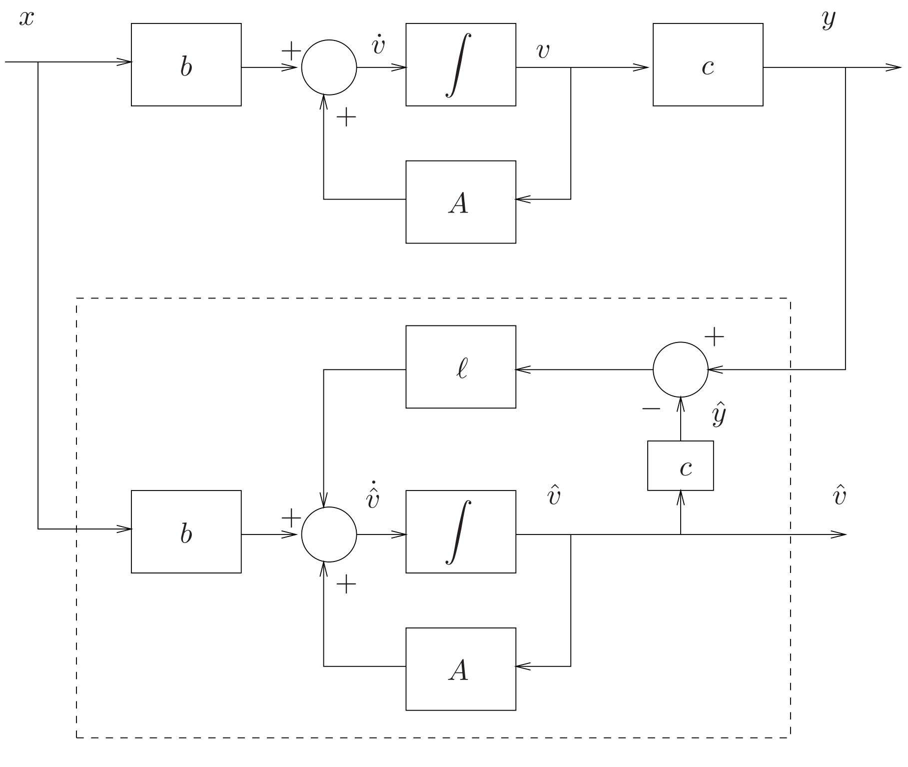


Figura 3.1: Observador de estados.

O observador é construído a partir da escolha da matriz ℓ. A justificativa para essa estrutura vem do fato de que o erro

$$e = v - \hat{v}$$

é assintoticamente nulo se todos autovalores da matriz $A - \ell c$ tiverem parte real negativa. De fato,

[1] D. G. Luenberg é professor na Stanford University, California, EUA.

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv$$

$$\dot{\hat{v}} = A\hat{v} + bx + \ell(y - \hat{y}) \quad , \quad \hat{y} = c\hat{v}$$

$$\dot{\hat{v}} = (A - \ell c)\hat{v} + bx + \ell y$$

$$\dot{e} = \dot{v} - \dot{\hat{v}} = (A - \ell c)(v - \hat{v}) = (A - \ell c)e$$

Portanto, a dinâmica do erro é descrita por um sistema autônomo, isto é, independente da entrada. Além disso, alocando apropriadamente os autovalores de $A - \ell c$, pode-se controlar a taxa com que o erro tende a zero.

Propriedade 3.1
Os autovalores de $(A-\ell c)$ podem ser alocados arbitrariamente pela escolha de um ganho ℓ se e somente se o par (A, c) for observável.

Prova: por dualidade, se (A', c') é controlável, então os autovalores de $(A' - c'k)$ podem ser alocados arbitrariamente. Basta fazer $\ell = k'$.

_⋄_

Propriedade 3.2 (Cômputo do estimador pela equação de Lyapunov)
Considere o sistema de dimensão n

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv$$

1. Escolha uma matriz $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ estável com os autovalores desejados (distintos de A).

2. Escolha ℓ arbitrário tal que (F, ℓ) seja controlável.

3. Obtenha a solução única T da equação de Lyapunov

$$TA - FT = \ell c$$

4. A equação de estado

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Fz + Tbx + \ell y \\ \hat{v} &= T^{-1}z \end{aligned}$$

gera um estimador para v.

Se A e F não têm autovalores em comum, então a única solução de $TA - FT = \ell c$ é não-singular se e somente se (A, c) é observável e (F, ℓ) é controlável.

Definindo $e = z - Tv$

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{v} = Fz + Tbx + \ell cv - TAv - Tbx$$

e, como $TA = FT + \ell c$, tem-se

$$\dot{e} = Fz + \ell cx - (FT + \ell c)x = F(z - Tv) = Fe$$

Se F é estável, $e(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$, e $z \to Tv$, e portanto $T^{-1}z$ é um estimador para v.

_⋄_

3.1.1 Estimador de estado de ordem reduzida

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{v} &= Av + bx\\ y &= cv\end{aligned}$$

Sistemas observáveis podem ser colocados na forma canônica observável. Por exemplo, para $n = 4$, tem-se

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -\alpha_3 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v$$

Note que a saída $y(t)$ é a primeira variável de estado, e portanto pode-se construir um estimador de estado apenas para as demais variáveis v_i, $i = 2, 3, \ldots, n$

Propriedade 3.3 (Estimador de ordem reduzida pela equação de Lyapunov)

1. Escolha $F \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ estável com autovalores distintos de A.

2. Escolha ℓ arbitrário tal que (F, ℓ) seja controlável.

3. Obtenha a solução única $T \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ da equação de Lyapunov $TA - FT = \ell c$

4. A equação de estado $(n-1)$-dimensional estima v

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Fz + Tbx + \ell y\\ \hat{v} &= \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Note que a equação

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

pode ser escrita

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix} \hat{v}$$

e portanto $y = c\hat{v}$ e $z = T\hat{v}$. Então, y é um estimador para cv e z para Tv, pois

$$e = z - Tv$$

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{v} = Fz + Tbx + \ell cv - TAv - Tbx = Fe$$

e, novamente, se F é estável, então $e(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

_◇_

Propriedade 3.4

Se A e F não têm autovalores em comum, então a matriz quadrada

$$P = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}$$

com T solução única de $TA - FT = \ell c$ é não singular se e somente se (A, c) for observável e (F, ℓ) for controlável.

_◇_

3.1.2 Realimentação a partir dos estados estimados

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Av + bx \\ y &= cv \end{aligned}$$

Se (A, b) é controlável, a realimentação de estados $x = r - kv$ aloca arbitrariamente os autovalores de $(A - bk)$.

Entretanto, o vetor de estado nem sempre está disponível para a realimentação. Nesse caso, pode-se construir um observador de estados.

Se (A, c) é observável, um observador de estados de ordem completa ou reduzida com autovalores arbitrários pode ser construído. Por exemplo, o estimador de ordem n dado por

$$\dot{\hat{v}} = (A - \ell c)\hat{v} + bx + \ell y$$

A escolha de ℓ (ou melhor, dos autovalores de $(A - \ell c)$) determina a taxa com que o estado estimado $\hat{v}$ converge para o estado do sistema.

A realimentação dos estados estimados produz

$$x = r - k\hat{v}$$

e, combinando as equações, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Av - bk\hat{v} + br \\ \dot{\hat{v}} &= (A - \ell c)\hat{v} + b(r - k\hat{v}) + \ell cv \end{aligned}$$

que é um sistema de dimensão $2n$, que pode ser escrito

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\hat{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -bk \\ \ell c & A - \ell c - bk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \hat{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \hat{v} \end{bmatrix}$$

Definindo uma transformação de similaridade

$$\begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v - \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \hat{v} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{I} & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = P$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk & bk \\ 0 & A - \ell c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix}$$

Note que os autovalores da matriz dinâmica do sistema aumentado são a união dos autovalores de $(A - bk)$ e $(A - \ell c)$. Portanto, o estimador não altera os autovalores nem tem seus autovalores modificados pela conexão. Essa propriedade é conhecida como o princípio da separação.

Além disso, o sistema aumentado é não controlável (forma canônica), e a função de transferência do sistema é igual à da equação

$$\dot{v} = (A - bk)v + br \quad , \quad y = cv$$

dada por

$$G_f(s) = c(s\mathrm{I} - A + bk)^{-1}b$$

Ou seja, na função de transferência não aparece o estimador.

De fato, no cômputo de funções de transferência, as condições iniciais são assumidas iguais a zero e, portanto, $v(0) = \hat{v}(0) = 0$ o que garante que $v(t) = \hat{v}(t)$ para todo t.

3.2 Sistemas MIMO

Considere o sistema

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad y = Cv$$

O estimador de ordem completa (isto é, a dimensão de $\hat{v}$ é a mesma de v) é dado por

$$\dot{\hat{v}} = (A - LC)\hat{v} + Bx + Ly$$

A dinâmica do erro é descrita pela equação autônoma

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Propriedade 3.5
Se (A, C) é observável, então todos os autovalores de $(A - LC)$ podem ser arbitrariamente alocados pela escolha de L (determinando assim a taxa com que $\hat{v}$ converge para v).

$\_\diamond\_$

O ganho L do estimador pode ser computado pelos mesmos métodos utilizados para o cálculo do ganho K do controlador (dualidade).

3.2.1 Estimadores de ordem reduzida

Considere novamente o sistema

$$\dot{v} = Av + Bx \quad , \quad y = Cv$$

com $\text{rank}(C) = q$. Defina a transformação de similaridade

$$P = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$$

com $R \in \mathbb{R}^{(n-q)\times n}$ escolhida de maneira a que exista $P^{-1} = Q$, que por sua vez pode ser particionada na forma

$$Q = P^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} Q_1 & Q_2 \end{array} \right] \quad , \quad Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times q} \quad , \quad Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n-q)}$$

Como $QP = \mathrm{I}$, tem-se

$$\mathrm{I}_n = PQ = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CQ_1 & CQ_2 \\ RQ_1 & RQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_q & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-q} \end{bmatrix}$$

Aplicando a transformação de similaridade $v = Q\hat{v} = P^{-1}\hat{v}$ no sistema, tem-se

$$\dot{\bar{v}} = PAP^{-1}\bar{v} + PBx$$

$$y = CP^{-1}\bar{v} = CQ\bar{v} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_q & 0 \end{bmatrix} \bar{v}$$

ou, reescrevendo em termos das partições,

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_1 \\ \dot{\bar{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_q & 0 \end{bmatrix} \bar{v} = \bar{v}_1 \quad , \quad \bar{v}_1 \in \mathbb{R}^{q\times 1} \quad , \quad \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^{(n-q)\times 1}$$

Como a saída y do sistema transformado coincide com os q primeiros estados $\bar{v}_1$, apenas os demais $n - q$ elementos do vetor $\bar{v}$ precisam ser estimados.

A equação de estados pode ser reescrita como

$$\dot{y} = \bar{A}_{11}y + \bar{A}_{12}\bar{v}_2 + \bar{B}_1 x$$

$$\dot{\bar{v}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{v}_2 + \bar{A}_{21}y + \bar{B}_2 x$$

e, definindo-se

$$\bar{x} = \bar{A}_{21}y + \bar{B}_2 x \quad , \quad w = \dot{y} - \bar{A}_{11}y - \bar{B}_1 x$$

tem-se

$$\dot{\bar{v}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{v}_2 + \bar{x} \quad , \quad w = \bar{A}_{12}\bar{v}_2$$

Propriedade 3.6
O par (A, C) (ou o par $(\bar{A}, \bar{C})$) é observável se e somente se o par $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ é observável.

_◇_

Portanto, existe um estimador para $\bar{v}_2$ na forma

$$\dot{\hat{\bar{v}}}_2 = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{v}}_2 + \bar{L}w + \bar{x} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{v}}_2 + \bar{L}(\dot{y} - \bar{A}_{11}y - \bar{B}_1 x) + (\bar{A}_{21}y + \bar{B}_2 x)$$

Definindo $z = \hat{\bar{v}}_2 - \bar{L}y$, tem-se

$$\dot{z} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})(z + \bar{L}y) + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11})y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)xu$$

$$\dot{z} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})z + \Big((\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L} + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11})\Big)y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)x$$

sendo que $z + \bar{L}y$ é uma estimativa de $\bar{v}_2$.
Com o erro dado por

$$e = \bar{v}_2 - (z + \bar{L}y)$$

a equação dinâmica do erro é

$$\dot{e} = \dot{\bar{v}}_2 - (\dot{z} + \bar{L}\dot{y}) = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})e$$

Como o par $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ é observável, os autovalores de $\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12}$ podem ser alocados arbitrariamente. O estado estimado é composto pela informação precisa obtida da saída y mais a estimativa $z + \bar{L}y$, isto é,

$$\hat{\bar{v}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{v}}_1 \\ \hat{\bar{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \bar{L}y + z \end{bmatrix}$$

Nas coordenadas originais, tem-se

$$\hat{v} = P^{-1}\hat{\bar{v}} = Q\hat{\bar{v}} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \bar{L}y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_q & 0 \\ \bar{L} & \mathrm{I}_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Os autovalores de $\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12}$ podem ser alocados pela escolha de $\bar{L}$, usando-se os mesmos métodos utilizados para cálculo de realimentação de estados.

Propriedade 3.7 (Estimador de ordem reduzida pela equação de Lyapunov)
Considere um sistema de dimensão n e q saídas, com o par (A, C) observável e C de rank q.

1. Escolha $F \in \mathbb{R}^{(n-q)\times(n-q)}$ estável arbitrária mas com autovalores diferentes daqueles de A.

2. Escolha $L \in \mathbb{R}^{(n-q)\times q}$ tal que (F, L) seja controlável.

3. Obtenha $T \in \mathbb{R}^{(n-q)\times n}$ solução única da equação de Lyapunov

$$TA - FT = LC$$

4. Se a matriz quadrada

$$P = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$$

for singular, retorne ao passo 2 e repita o processo para outra matriz L. Se P for não singular, a equação de estado de ordem $n - q$

$$\dot{z} = Fz + TBx + Ly$$
$$\hat{v} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

produz um estimador para v.

Da equação do estimador, tem-se $y = C\hat{v}$ (y portanto estima Cv) e $z = T\hat{v}$. Definindo $e = z - Tv$, tem-se

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{v} = Fz + TBx + LCv - TAv - TBx = Fz + (LC - TA)v = F(z - Tv) = Fe$$

Se F é estável, $e(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$ e portanto z é um estimador para Tv

_◇_

Propriedade 3.8
Se A e F não têm autovalores em comum, então a matriz quadrada

$$P = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$$

com T solução única de $TA - FT = LC$ é não singular somente se (A, C) é observável e (F, L) é controlável.

Condição apenas necessária. Dado um par (A, C) observável, é possível escolher (F, L) controlável e obter P singular.

_◇_

3.2.2 Realimentação a partir dos estados estimados

Considere o sistema n dimensional

$$\dot{v} = Av + Bx$$
$$y = Cv$$

e o estimador de ordem $n - q$

$$\dot{z} = Fz + TBx + Ly$$
$$\hat{v} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Particionando a inversa de P na forma

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$$

com $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}$ e $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-q)}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = Q_1 C + Q_2 T = \mathrm{I}$$

pode-se re-escrever o estimador de ordem $n - q$

$$\dot{z} = Fz + TBx + Ly$$

$$\hat{v} = Q_1 y + Q_2 z$$

Se o estado do sistema não estiver disponível para realimentação, pode-se utilizar o estado estimado $\hat{v}$

$$x = r - K\hat{v} = r - KQ_1 y - KQ_2 z$$

$$\dot{v} = Av + B(r - KQ_1 y - KQ_2 z) = (A - BKQ_1 C)v - BKQ_2 z + Br$$

$$\dot{z} = Fz + TB(r - KQ_1y - KQ_2z) + LCv = (LC - TBKQ_1C)v + (F - TBKQ_2)z + TBr$$

A equação do sistema aumentado (dimensão $2n - q$) é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BKQ_1C & -BKQ_2 \\ LC - TBKQ_1C & F - TBKQ_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ TB \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix}$$

ou, utilizando uma transformação de similaridade

$$\begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ z - Tv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -T & \mathrm{I}_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix}$$

que, usando a equação $TA - FT = LC$ e as partições Q_1 e Q_2 da inversa de P, produz

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BKQ_2 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ e \end{bmatrix}$$

Assim como no caso SISO, vale o princípio da separação e a matriz de transferência de r para y é dada por

$$G_f(s) = C(s\mathrm{I} - A + BK)^{-1}B$$

3.3 Exercícios

Exercício 3.1

Considere o sistema linear dado por

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = Cv$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre, se possível (se não for possível, justifique), o ganho $L \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ do observador de estados de ordem completa dado por

$$\dot{\hat{v}} = A\hat{v} + Bx + L(y - C\hat{v})$$

que leve o erro do observador $(\hat{v} - v)$ assintoticamente para zero, alocando os autovalores da matriz dinâmica do erro em -4 e -5. ✣

Exercício 3.2

Considere o sistema linear dado por

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \; , \; b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \; , \; c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine, se possível (se não for possível, justifique), o ganho $\ell \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ do observador de estados de ordem completa dado por

$$\dot{\hat{v}} = A\hat{v} + bx + \ell(y - c\hat{v})$$

que leve o erro do observador $(v - \hat{v})$ assintoticamente para zero alocando os autovalores da matriz dinâmica do erro em -5 e -6.

✣

Exercício 3.3

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} v$$

a) Determine, se possível, o ganho $\ell \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ do observador de estados de ordem completa dado por

$$\dot{\hat{v}} = A\hat{v} + bx + \ell(y - c\hat{v})$$

que leve o erro do observador $(v - \hat{v})$ assintoticamente para zero alocando os autovalores da matriz dinâmica do erro em -5 e -6.

b) Determine, se possível, uma transformação de similaridade $\bar{v} = Tv$ que coloque a saída do sistema na forma

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{v}$$

c) Determine, se possível, o ganho escalar $\bar{\ell}$ do observador de estados de ordem reduzida dado por

$$\dot{z} = \left(\bar{A}_{22} - \bar{\ell}\bar{A}_{12}\right) z + \left[\left(\bar{A}_{22} - \bar{\ell}\bar{A}_{12}\right)\bar{\ell} + \left(\bar{A}_{21} - \bar{\ell}\bar{A}_{11}\right)\right] y + \left(\bar{b}_2 - \bar{\ell}\bar{b}_1\right) x$$

$$\hat{\bar{v}} = \begin{bmatrix} y \\ z + \bar{\ell}y \end{bmatrix}, \qquad \hat{v} = T^{-1}\hat{\bar{v}}$$

que aloca a dinâmica do erro em -8, sendo as partições obtidas após aplicar-se a transformação de similaridade T do item b)), isto é, $\bar{A} = TAT^{-1}$; $\bar{b} = Tb$; $\bar{c} = cT^{-1}$.

✣

Capítulo 4

Sistemas Variantes no Tempo

Embora existam diversos livros sobre sistemas lineares, como por exemplo [5, 2, 3, 1], nem sempre o caso variante no tempo é abordado em detalhes. Em particular, os livros [7, 8] dedicam um bom espaço às propriedades dos sistemas lineares variantes no tempo, algumas reproduzidas neste capítulo. Considere o sistema linear variante no tempo dado por

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= A(t)v(t) + B(t)x(t) \\ y(t) &= C(t)v(t) + D(t)x(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Propriedade 4.1
Se as matrizes do sistema (4.1) são funções contínuas no tempo, a solução $v(t)$ é unicamente determinada por $v(t_0) = v_0$ e $x(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$.

—◇—

Propriedade 4.2
As soluções da equação homogênea (para o conjunto de todas as possíveis condições iniciais)

$$\dot{v}(t) = A(t)v(t) \tag{4.2}$$

com $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, para todo t, formam um espaço linear de dimensão n, pois para $\psi_1(t), \psi_2(t) \in \mathbb{R}^n$ soluções e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\frac{d}{dt}\big(\alpha_1\psi_1(t) + \alpha_2\psi_2(t)\big) = \alpha_1\dot{\psi}_1(t) + \alpha_2\dot{\psi}_2(t) = \alpha_1 A(t)\psi_1(t) + \alpha_2 A(t)\psi_2(t) = A(t)\big(\alpha_1\psi_1(t) + \alpha_2\psi_2(t)\big)$$

Além disso, se a solução $v(t)$ é nula para algum valor t_1, então $v(t) = 0, \forall t$, pois 0 é um ponto de equilíbrio do sistema (ou seja, não existe solução que passe pelo ponto de equilíbrio $v = 0$ a não ser a função $v(t) = 0, \forall t$).

—◇—

Definição: Matriz Fundamental

Matriz fundamental é qualquer matriz composta por colunas soluções da equação homogênea (4.2) associadas a n condições iniciais linearmente independentes.

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) & \cdots & \psi_n(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t)$$

Note que $\Psi(t_0)$ é composta pelas n condições iniciais linearmente independentes $\psi_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, e que como as escolhas são arbitrárias, a matriz fundamental não é única.

Propriedade 4.3
Uma matriz fundamental é não singular para todo t.

Prova: considerando que para algum t_1 existem α_k, $k = 1, \ldots, n$ não todos nulos, tais que

$$v(t_1) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(t_1) = 0$$

tem-se

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(t) = 0 \ , \ \forall t$$

pois $v(t)$ é solução (combinação linear de soluções). Isso implicaria

$$v(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(t_0) = 0$$

o que contradiz a hipótese de que os vetores $\psi_k(t_0)$ (condições iniciais) são linearmente independentes.

_◇_

Exemplo 4.1
Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} v$$

cuja solução é, para $t_0 = 0$ e $v(0)$ dados

$$\dot{v}_1(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1(t) = v_1(0)$$

$$\dot{v}_2(t) = t v_1(t) \quad \Rightarrow \quad v_2(t) = \frac{1}{2} t^2 v_1(0) + v_2(0)$$

Assim, tem-se

$$v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \psi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \psi_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

e portanto uma matriz fundamental é dada por

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é -2 para todo t.

_✷_

Propriedade 4.4
Dadas duas matrizes fundamentais $\Psi_1(t)$ e $\Psi_2(t)$ do sistema $\dot{v} = A(t)v$, existe um transformação linear T constante, não singular, tal que

$$\Psi_2(t) = \Psi_1(t) T$$

pois, como $\Psi_1(t)$ e $\Psi_2(t)$ são não singulares, existe $T(t)$ não singular tal que

$$\Psi_2(t) = \Psi_1(t) T(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\Psi}_2(t) = \dot{\Psi}_1(t) T(t) + \Psi_1(t) \dot{T}(t)$$

$$\dot{\Psi}_2(t) = A(t)\Psi_2(t) = A(t)\Psi_1(t)T(t) = A(t)\Psi_1(t)T(t) + \Psi_1(t)\dot{T}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{T}(t) = 0$$

_◇_

Definição: Matriz de Transição de Estados
A função matricial dada por

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$$

é a matriz de transição de estado de $\dot{v} = A(t)v$ para a matriz fundamental $\Psi(t)$.

Propriedade 4.5
Matriz de Transição
• A matriz de transição de estados $\Phi(t, t_0)$ é a solução única da equação

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \quad , \quad \Phi(t_0, t_0) = \mathrm{I}$$

pois

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = \dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t_0) = A(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \quad , \quad \Phi(t_0, t_0) = \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t_0) = \mathrm{I}$$

• A matriz de transição de estados $\Phi(t, t_0)$ é invariante com a matriz fundamental, pois para duas matrizes fundamentais $\Psi_1(t)$ e $\Psi_2(t)$

$$\Psi_1(t) = \Psi_2(t)T \quad \Rightarrow \quad \Phi(t, t_0) = \Psi_2(t)\Psi_2^{-1}(t_0) = \Psi_1(t)TT^{-1}\Psi_1^{-1}(t_0) = \Psi_1(t)\Psi_1^{-1}(t_0)$$

• $\Phi(t, t) = \mathrm{I}$, $\forall t$
• $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t) = \Phi(t_0, t)$
• $\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)$
• Para $A(t) = A$ (sistema invariante no tempo), tem-se

$$\Phi(t, t_0) = \exp\big(A(t - t_0)\big)$$

pois

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A\exp\big(A(t - t_0)\big) = A\Phi(t, t_0)$$

• $v(t) = \Phi(t, t_0)v(t_0)$ é solução de $\dot{v}(t) = A(t)v(t)$, $v(t_0)$ dado. De fato,

$$\dot{v}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0)v(t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)v(t_0) = A(t)v(t) \quad , \quad v(t_0) = \Phi(t_0, t_0)v(t_0)$$

$\_\diamond\_$

Um estudo sobre a estabilidade de sistemas lineares contínuos variantes no tempo pode ser encontrado em [4].

4.1 Exercícios

Exercício 4.1
Considere o sistema linear

$$\dot{v} = A(t)v(t) \quad , \quad \Phi(t, t_0)$$

e o chamado sistema adjunto, definido a partir do conjugado transposto de $A(t)$, dado por

$$\dot{z} = -A^*(t)v(t) \quad , \quad \Phi_a(t, t_0)$$

com suas respectivas matrizes de transição de estados. Mostre que

$$\Phi_a(t, t_0) = \Phi^*(t_0, t)$$

Solução: pela definição de matriz de transição de estados, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0)$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t_0)\Psi^{-1}(t) = \Psi(t_0)\frac{d}{dt}\Psi^{-1}(t)$$

e, como

$$\Psi(t)\Psi^{-1}(t) = \mathrm{I} \quad \Rightarrow \quad \dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t) + \Psi(t)\frac{d}{dt}\Psi^{-1}(t) \quad , \quad \frac{d}{dt}\Psi^{-1}(t) = -\Psi^{-1}(t)\dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t)$$

tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t) = \Psi(t_0)\big(-\Psi^{-1}(t)\dot{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t)\big) = -\Psi(t_0)\Psi^{-1}(t)A(t) = -\Phi(t_0,t)A(t)$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi^*(t_0,t) = -A^*(t)\Phi^*(t_0,t) \quad \Rightarrow \quad \Phi_a(t,t_0) = \Phi^*(t_0,t)$$

✣

Exercício 4.2

Mostre que a matriz de transição de estados $\Phi(t,t_0)$ de um sistema linear variante no tempo

$$\dot{v}(t) = A(t)v(t)$$

é unicamente determinada a partir de $A(t)$ e não depende da matriz fundamental escolhida.

✣

Exercício 4.3

Considere o sistema linear variante no tempo descrito pela equação

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2t^3 & 0 \end{bmatrix} v$$

a) Obtenha uma matriz fundamental $\Psi(t)$ para o sistema

b) Obtenha a matriz de transição de estados $\Phi(t,t_0)$

✣

Exercício 4.4

Mostre que a matriz de transição de estados de um sistema linear variante no tempo $\dot{v} = A(t)v$ satisfaz a propriedade $\Phi(t,t_0) = \Phi^{-1}(t_0,t)$

✣

Exercício 4.5

Considere o sistema linear variante no tempo descrito pela equação

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t^2 & 0 \end{bmatrix} v$$

a) Obtenha uma matriz fundamental para o sistema

b) Obtenha a matriz de transição de estados $\Phi(t,t_0)$

✣

Referências Bibliográficas

[1] P. J. Antsaklis and A. N. Michel. *Linear Systems*. Birkhäuser, Boston, 2006.

[2] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.

[3] Z. Gajić. *Linear Dynamic Systems and Signals*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2003.

[4] G. Garcia, P. L. D. Peres, and S. Tarbouriech. Assessing asymptotic stability of linear continuous time-varying systems by computing the envelope of all trajectories. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4):998–1003, April 2010.

[5] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1980.

[6] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2):74–80, April 1964.

[7] W. J. Rugh. *Linear System Theory*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

[8] P. E. Sarachik. *Principles of Linear Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1997.