1ª Questão: Considere o sistema discreto definido pela relação entrada-saída

$$y[n] = \sum_{k=n-2}^{n+1} (n-k)x[k]$$

a) Determine a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema
b) Classifique o sistema quanto à BIBO estabilidade e causalidade, justificando a resposta.
c) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada $x[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$

$$\sum_{k=n-2}^{n+1} f[k] = f[n-2] + f[n-1] + f[n] + f[n+1] = \sum_{k=-\infty}^{n+1} f[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-3} f[k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n+1} (n-k)x[k] - \sum_{k=-\infty}^{n-3} (n-k)x[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (n-k)x[k]\Big(u[n+1-k] - u[n-3-k]\Big)$$

$h[n] = n\big(u[n+1] - u[n-3]\big) = n(\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]) = -\delta[n+1] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$

$y[n] = x[n] * h[n] \;\Rightarrow$ SLIT. O sistema é BIBO estável, pois a resposta ao impulso é absolutamente somável, e não causal, pois $h[n] \neq 0$ para $n < 0$.

$$\begin{aligned} y[n] = h[n] * x[n] &= (-\delta[n+1] + \delta[n-1] + 2\delta[n-2]) * (\delta[n-1] + 2\delta[n-2]) \\ &= -\delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + 4\delta[n-3] + 4\delta[n-4] \end{aligned}$$

2ª Questão: Para a sequência $x[n] = n^2(1/4)^n u[n]$, determine:

a) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]$ b) $\mathcal{Z}\{y[n] = x[-n]\}$, Ω_y

$$\mathcal{Z}\{n^2(1/4)^n u[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)\mathcal{Z}\{n(1/4)^n u[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)\frac{4z}{(4z-1)^2} = \frac{16z^2+4z}{(4z-1)^3}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] = \mathcal{Z}\{n^2(1/4)^n u[n]\}\Big|_{z=1} = \frac{16z^2+4z}{(4z-1)^3}\Big|_{z=1} = \frac{20}{27}$$

$$Y(z) = X(z^{-1}) = \frac{-(4z^2+16z)}{(z-4)^3}, \quad |z| < 4$$

3ª Questão: As transformadas Z da distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias discretas $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ são dadas por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-7}{z-8}\ , \quad |z| < 8, \quad \mathcal{E}\{z^{\mathbb{Y}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{Y} = k\} = \frac{-3}{z-4}\ , \quad |z| < 4$$

Considerando $\mathbb{W} = \mathbb{X} + 2\mathbb{Y}$, determine:

a) $\mathcal{E}\{z^{\mathbb{W}}\} = \displaystyle\sum_k z^k \Pr\{\mathbb{W} = k\}$ b) $\Pr\{\mathbb{W} = 0\}$ c) $\Pr\{\mathbb{W} = 1\}$

d) A média da variável $\mathbb{W}$, isto é, $\mathcal{E}\{\mathbb{W}\} = \displaystyle\sum_k k \Pr\{\mathbb{W} = k\}$

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{W}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}+2\mathbb{Y}}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{(z^2)^{\mathbb{Y}}\} = \left(\frac{-7}{z-8}\right)\left(\frac{-3}{z^2-4}\right) = \frac{21}{(z^2-4)(z-8)}$$

$$\Pr\{\mathbb{W} = 0\} = 21/32, \quad \Pr\{\mathbb{W} = 1\} = \frac{(21)(4)}{32^2} = \frac{21}{256}, \quad \mathcal{E}\{\mathbb{W}\} = 17/21$$

4ª Questão: Considere a equação a diferenças dada por

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = x[n], \quad y[0] = 1, \; y[1] = 5$$

a) Determine $Y(z)$ para $x[n] = 0$, b) Determine $y[n]$ para $x[n] = 0$
c) Determine a resposta ao impulso $h[n]$ (condições iniciais nulas)
d) Determine a solução forçada para a entrada $x[n] = 2 \times 3^{n+1}$
e) Determine a solução para $x[n] = 2 \times 3^{n+1}$, $y[0] = y[1] = 0$
f) Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução do item e)

a) $Y(z) = \dfrac{z^2 y[0] + (y[1] - 5y[0])z}{z^2 - 5z + 6} = \dfrac{z^2}{(z-2)(z-3)} = \dfrac{3z}{z-3} - \dfrac{2z}{z-2}$, b) $y[n] = (3(3)^n - 2(2)^n)u[n]$

c) $H(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3}\dfrac{z}{z-3} - \dfrac{1}{2}\dfrac{z}{z-2}$, $h[n] = \dfrac{1}{6}\delta[n] + \Big(\dfrac{1}{3}3^n - \dfrac{1}{2}2^n\Big)u[n]$

d) $y_f[n] = 2n(3)^n$, e) $y[n] = 6(2)^n - 6(3)^n + 2n3^n$, f) $(p-2)(p-3)^2 y[n] = 0$, $y[0] = 0, y[1] = 0, y[2] = 6$

5ª Questão: Considere o sistema descrito pela relação entrada-saída

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\xi)(\xi - t)d\xi$$

a) Determine a resposta ao impulso $h(t)$ do sistema

$$h(t) = -t\big(u(t+1) - u(t-1)\big)$$

b) Classifique o sistema quanto à linearidade, variante ou invariante no tempo, causalidade e BIBO estabilidade

Sistema linear invariante no tempo, BIBO estável e não causal.

c) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada $x(t) = u(t) - u(t-2)$

$$y(t) = \mathcal{I}_h(t) - \mathcal{I}_h(t-2), \quad \mathcal{I}_h(t) = \frac{1-t^2}{2} G_2(t)$$

6ª Questão: Determine os coeficientes a e b que minimizam o erro quadrático médio da representação do sinal $x(t)$ em termos dos sinais $g_1(t)$ e $g_2(t)$, isto é,

$$x(t) \approx a g_1(t) + b g_2(t)$$

com os sinais dados por

$$x(t) = (t^2 - 1)G_2(t-1), \quad g_1(t) = G_2(t-1), \quad g_2(t) = tG_2(t-1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = -5/3, \quad b = 2$$

7ª Questão: a) Determine os coeficientes c_k da série exponencial de Fourier de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - k10) \quad , \quad p(t) = -tG_2(t+1) + (2-t)G_2(t-1)$$

b) Calcule c_0

$$\omega_0 = \frac{\pi}{5} \quad , \quad c_0 = \frac{2}{5} \quad , \quad c_k = \frac{1}{jk2\pi}\left(\frac{-\exp(j2k\pi/5) + \exp(-j2k\pi/5)}{jk\pi/5} + 2\exp(j2k\pi/5) + 2\right)$$