1ª Questão: Considere o sistema discreto definido pela relação entrada-saída

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]\Big(u[k+1] - u[k-2]\Big)$$

a) Determine a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema

$$h[n] = u[n+1] - u[n-2] = \delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

b) Classifique o sistema quanto à BIBO estabilidade e causalidade, justificando a resposta.

O sistema é BIBO estável, pois a resposta ao impulso é absolutamente somável, e não causal, pois $h[n] \neq 0$ para $n < 0$.

c) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$

$$\begin{aligned} y[n] = h[n] * x[n] &= (\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]) * (\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]) \\ &= \delta[n+1] + 3\delta[n] + 6\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + 3\delta[n-3] \end{aligned}$$

d) Determine a função de transferência $H(z)$ do sistema

$$H(z) = z\left(\frac{z}{z-1}\right) - z^{-2}\left(\frac{z}{z-1}\right) = z^{-1} + 1 + z, \qquad z \neq 0, \quad z \neq \infty$$

e) Determine a solução forçada para a entrada $x[n] = 1$

$$y[n] = H(1)1 = 3$$

2ª Questão: Considere a transformada Z de uma sequência $x[n]$ dada por

$$X(z) = \frac{28z^2 - 19z}{4z^2 - 5z + 1} = \frac{28z^2 - 19z}{(z-1)(4z-1)}, \quad |z| > 1$$

Determine: a) $x[0]$ b) $x[1]$ c) $x[+\infty]$ d) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]$

$$x[0] = 7, \quad x[1] = 4, \quad x[+\infty] = 3, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \to +\infty$$

3ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{17 - 11z}{(4z-10)(3z-4)} = \frac{17 - 11z}{12z^2 - 46z + 40}\ , \ |z| < 4/3$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X} = 0\}$ b) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$ c) A média da variável, isto é, $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

d) A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{W} = -2\mathbb{X}$

$$\Pr\{\mathbb{X} = 0\} = \frac{17}{40}, \quad \Pr\{\mathbb{X} = 1\} = \frac{-11}{40} + \frac{17 \times 46}{40^2} = \frac{171}{800}, \quad \mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{11}{6}$$

$$G_{\mathbb{W}}(z) = X(z^{-2}) = \frac{17 - 11z^{-2}}{(4z^{-2} - 10)(3z^{-2} - 4)} = \frac{17z^4 - 11z^2}{(4 - 10z^2)(3 - 4z^2)}$$

4ª Questão: Considere a equação a diferenças dada por

$$y[n+2] + 4y[n+1] + 4y[n] = x[n], \quad y[0] = 2, y[1] = -8$$

a) Determine $Y(z)$ para $x[n] = 0$

$$Y(z) = \frac{z^2 y[0] + zy[1] + 4zy[0]}{z^2 + 4z + 4} = \frac{2z^2}{(z+2)^2}$$

b) Determine $y[n]$ para $x[n] = 0$: $y[n] = 2(n+1)(-2)^n u[n]$

c) Determine a resposta ao impulso $h[n]$ (condições iniciais nulas)

$$H(z) = \frac{1}{(z+2)^2} = z^{-1}\left(\frac{z}{(z+2)^2}\right) \quad \Rightarrow \quad h[n] = (n-1)(-2)^{(n-2)} u[n-1]$$

d) Determine a solução forçada para a entrada $x[n] = (-2)^{n+1}$: $y_f[n] = -(1/4)n^2(-2)^n$

e) Determine a solução para $x[n] = (-2)^{n+1}$, $y[0] = 2$ e $y[1] = 1/2$:

$$y[n] = 2(-2)^n - 2n(-2)^n - (1/4)n^2(-2)^n$$

f) Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução do item e)

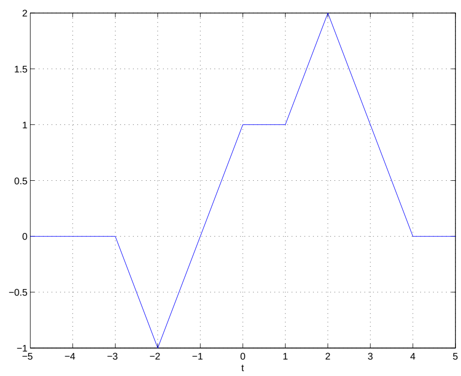
$$(p+2)^3 y[n] = 0, \qquad y[0] = 2,\ y[1] = 1/2,\ y[2] = -12$$

5ª Questão: Considere o sistema descrito pela relação entrada-saída: $y(t) = \int_{t-2}^{t+2} x(\xi) d\xi$

a) Determine a resposta ao impulso $h(t)$ do sistema:
$h(t) = (u(t+2) - u(t-2))$

b) Classifique o sistema quanto à linearidade, variante ou invariante no tempo, causalidade e BIBO estabilidade: Sistema linear invariante no tempo, BIBO estável e não causal.

c) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada
$x(t) = -u(t+1) + 2u(t) - u(t-2)$



$$y(t) = \mathcal{I}_x(t+2) - \mathcal{I}_x(t-2)$$

6ª Questão: Determine os coeficientes a e b que minimizam o erro quadrático médio da representação do sinal $x(t)$ em termos dos sinais $g_1(t)$ e $g_2(t)$, isto é, $x(t) \approx ag_1(t) + bg_2(t)$ com os sinais dados por

$$x(t) = (2t - t^2)G_2(t-1), \quad g_1(t) = G_2(t-1), \quad g_2(t) = (1-t)G_2(t-1)$$

$$< g_1^2 >= 2,\ < g_2^2 >= 2/3,\ < g_1 g_2 >= 0,\ < xg_1 >= 4/3,\ < xg_2 >= 0, \qquad a = 2/3, \quad b = 0$$

7ª Questão: Determine os coeficientes c_k e o valor de c_0 da série exponencial de Fourier de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - k5) \quad , \quad p(t) = (1-t)G_1(t-0.5)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{5} \quad , \quad c_0 = 1/10 \quad , \quad c_k = \frac{1}{j2k\pi/5}\left(\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{j2k\pi/5}\right)\frac{1}{5}\left(-1 + \exp(-j2k\pi/5)\right)\right)$$