1ª Questão: A resposta ao impulso de um sistema linear discreto invariante no tempo é dada por $h[n] = u[n+1] - u[n-2]$, sendo $u[n]$ a função degrau ($u[n] = 0$, $n < 0$ e $u[n] = 1$, $n \geq 0$, n inteiro).

a) Classifique o sistema quanto à BIBO estabilidade e causalidade, justificando a resposta.

O sistema é BIBO estável, pois a resposta ao impulso é absolutamente somável, e não causal, pois $h[n] \neq 0$ para $n < 0$.

b) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada $x[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-1]$

$$\begin{aligned} y[n] = h[n] * x[n] &= (\delta[n+1] + \delta[n] + \delta[n-1]) * (2\delta[n+1] + \delta[n] - \delta[n-1]) \\ &= 2\delta[n+2] + 3\delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-2] \end{aligned}$$

c) Determine a função de transferência $H(z)$ do sistema

$$H(z) = z^{-1} + 1 + z = \frac{z^2 - z^{-1}}{z-1}, \qquad z \neq 0, \quad z \neq \infty$$

2ª Questão: Considere a transformada Z de uma sequência $x[n]$ dada por

$$X(z) = \frac{5z^3 - 16z^2 + 36z}{(z-2)^2(z+4)}, \quad 2 < |z| < 4$$

a) Decomponha $X(z)$ em frações parciais, ou seja, obtenha a, b e c tais que

$$X(z) = \frac{5z^3 - 16z^2 + 36z}{(z-2)^2(z+4)} = a\frac{z}{(z-2)^2} + b\frac{z}{(z-2)} + c\frac{z}{(z+4)}, \quad a = 4, \quad b = 0, \quad c = 5$$

b) Determine $x[n]$

$$X(z) = 4\frac{z}{(z-2)^2} + 5\frac{z}{(z+4)}, \quad x[n] = 4n(2)^{n-1}u[n] - 5(-4)^n u[-n-1]$$

3ª Questão: A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{31 - 7z}{2(z-4)(z-5)} = \frac{31 - 7z}{2z^2 - 18z + 40}, \ |z| < 4$$

a) Determine $\sum_k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = 1$

b) Determine a média de $\mathbb{X} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{7}{24}$

c) Determine as probabilidades $\Pr\{\mathbb{X} = 0\} = \frac{31}{40}$, $\Pr\{\mathbb{X} = 1\} = \frac{-7}{40} + \frac{18 \times 31}{40^2} = \frac{139}{800}$

4ª Questão: Considere a equação a diferenças dada por

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = x[n], \quad y[0], y[1] \text{ dados}$$

a) Determine $Y(z)$ em função de $y[0]$ e $y[1]$ quando $x[n] = 0$

$$Y(z) = \frac{z^2 y[0] + zy[1] - 5zy[0]}{z^2 - 5z + 6}$$

b) Determine a resposta ao impulso $h[n]$ (condições iniciais nulas)

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} = \frac{1}{6} - \frac{z/2}{z-2} + \frac{z/3}{z-3}, \quad h[n] = \frac{1}{6}\delta[n] - \frac{1}{2}(2)^n u[n] + \frac{1}{3}(3)^n u[n] = (3^{n-1} - 2^{n-1})u[n-1]$$

c) Determine a solução forçada para a entrada $x[n] = 3^{n+1}$: $y_f[n] = n3^n$

d) Determine a solução para $x[n] = 3^{n+1}$, $y[0] = 0$ e $y[1] = 1$

$$y[n] = 2(2)^n - 2(3)^n + n3^n$$

e) Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução do item d)

$$(p^3 - 8p^2 + 21p - 18)y[n] = (p-3)^2(p-2)y[n] = 0, \qquad y[0] = 0, y[1] = 1, y[2] = 8$$

5ª Questão: Considere o sistema descrito pela relação entrada-saída

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} x(\xi)(1 - \exp(-(t-\xi))d\xi$$

a) Determine a resposta ao impulso do sistema $h(t)$

$$h(t) = (1 - \exp(-t))(u(t) - u(t-1))$$

b) Classifique o sistema quanto à linearidade, variante ou invariante no tempo, causalidade e BIBO estabilidade
Sistema linear invariante no tempo, BIBO estável e causal.

c) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada $x(t) = u(t) - u(t-2)$, sendo $u(t)$ a função degrau (isto é, $u(t) = 0$, $t \le 0$ e $u(t) = 1$, $t > 0$)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \mathcal{I}_h(t) - \mathcal{I}_h(t-2)\mathcal{I}_h(t)$$

$$\mathcal{I}_h(t) = (u(t) - u(t-1)) \int_0^t (1 - \exp(-\xi))d\xi + \exp(-1)u(t-1)$$

$$= (u(t) - u(t-1))(\xi + \exp(-\xi))\Big|_{\xi=0}^{t} + \exp(-1)u(t-1)$$

$$= (u(t) - u(t-1))(t + \exp(-t) - 1) + \exp(-1)u(t-1) = (t + \exp(-t) - 1)G_1(t-0.5) + \exp(-1)u(t-1)$$

$$\mathcal{I}_h(t-2) = (t + \exp(-(t-2)) - 3)G_1(t-2.5) + \exp(-1)u(t-3),$$

A figura ilustra $y(t) = (t + \exp(-t) - 1)G_1(t-0.5) - (t + \exp(-(t-2)) - 3)G_1(t-2.5) + \exp(-1)G_2(t-2)$