1ª Questão: Determine a transformada de Fourier de $x(t) = \exp(-t^2/2)$

Dica: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-at^2)dt = \sqrt{\pi/a}$, $a > 0$

Completando quadrados:

$$\frac{(t+j\omega)^2}{2} = \frac{t^2}{2} + j\omega t - \frac{\omega^2}{2}$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)\exp(-j\omega t)dt = \exp(-\omega^2/2)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-0.5(t+j\omega)^2)dt$$

$$X(\omega) = \exp(-\omega^2/2)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-0.5(\beta)^2)d\beta = \exp(-\omega^2/2)\sqrt{2\pi}$$

Solução alternativa:

$$x(t) = \exp(-t^2/2) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -t\exp(-t^2/2) = -tx(t) \quad \Rightarrow \quad (j\omega)X(\omega) = -j\frac{d}{d\omega}X(\omega),$$

$$-\int_0^{\omega} \beta d\beta = \int_{X(0)}^{X(\omega)} \frac{1}{\beta}d\beta \quad \Rightarrow \quad -\frac{\omega^2}{2} = \ln\left(\frac{X(\omega)}{X(0)}\right) \quad \Rightarrow \quad X(\omega) = X(0)\exp(-\omega^2/2)$$

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)dt = \sqrt{2\pi} \quad \Rightarrow \quad X(\omega) = \sqrt{2\pi}\exp(-\omega^2/2)$$

2ª Questão: Determine o valor da integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sa}^5(t)dt \quad , \quad \mathrm{Sa}(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sa}^5(\omega_0 t/2)dt = \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^5(\omega_0 t/2)\}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^3(\omega_0 t/2)\}\right) * \left(\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(\omega_0 t/2)\}\right)\Bigg|_{\omega=0}$$

Computando $\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^3(\omega_0 t/2)\}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^3(\omega_0 t/2)\} &= \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(\omega_0 t/2)\}\right) * (\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}(\omega_0 t/2)\}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(\omega)\right) * \left(\frac{2\pi}{\omega_0}G_{\omega_0}(\omega)\right) = \frac{2\pi}{\omega_0^2}\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(\omega) * G_{\omega_0}(\omega)\end{aligned}$$

Computando $\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(\omega) * G_{\omega_0}(\omega)$:

$$\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(\omega) * G_{\omega_0}(\omega) = \mathcal{I}_X(\omega), \quad X(\omega) = \mathrm{Tri}_{2\omega_0}(\omega) * \Big(\delta(\omega+\omega_0/2) - \delta(\omega-\omega_0/2)\Big)$$

resultando em

$$X(\omega) = \begin{cases} \omega/\omega_0 + 3/2, & -3\omega_0/2 < \omega < -\omega_0/2 \\ -2\omega/\omega_0, & -\omega_0/2 < \omega < \omega_2 \\ \omega/\omega_0 - 3/2, & \omega_0/2 < \omega < 3\omega_0/2 \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_X(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\omega^2}{2\omega_0} + \dfrac{3\omega}{2} + \dfrac{9\omega_0}{8}, & -3\omega_0/2 < \omega < -\omega_0/2 \\ \dfrac{-\omega^2}{\omega_0} + \dfrac{3\omega_0}{4}, & -\omega_0/2 < \omega < \omega_2 \\ \dfrac{\omega^2}{2\omega_0} - \dfrac{3\omega}{2} + \dfrac{9\omega_0}{8}, & \omega_0/2 < \omega < 3\omega_0/2 \end{cases}$$

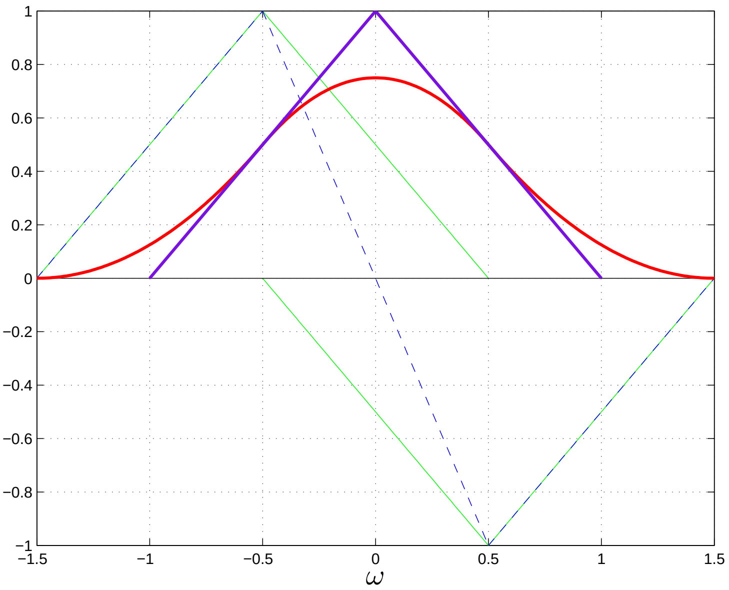
Portanto,

$$I = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{\omega_0^2}\mathcal{I}_X(\omega)\right)*\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(\omega)\right)\Bigg|_{\omega=0} = \frac{2\pi}{\omega_0^3}\int_{-\omega_0}^{+\omega_0}\mathcal{I}_X(\omega)\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(-\omega)d\omega = \frac{4\pi}{\omega_0^3}\int_{0}^{\omega_0}\mathcal{I}_X(\omega)\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(-\omega)d\omega$$

$$I = \frac{4\pi}{\omega_0^3}\left(\int_0^{\omega_0/2}\left(-\frac{\omega}{\omega_0}+1\right)\left(\frac{-\omega^2}{\omega_0}+\frac{3\omega_0}{4}\right)d\omega + \int_{\omega_0/2}^{\omega_0}\left(-\frac{\omega}{\omega_0}+1\right)\left(\frac{\omega^2}{2\omega_0}-\frac{3\omega}{2}+\frac{9\omega_0}{8}\right)d\omega\right)$$

$$I = \frac{4\pi}{\omega_0^3}\left(\frac{49\omega_0^2}{192}+\frac{17\omega_0^2}{384}\right) = \frac{115\pi}{96\omega_0}$$

A figura a seguir ilustra os sinais $\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(\omega+\omega_0/2))$, $\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(\omega-\omega_0/2))$, $X(\omega)$ (tracejado azul), $\mathrm{Tri}_{2\omega_0}(\omega)$ (roxo sólido) e $\mathcal{I}_X(\omega)$ (vermelho sólido) para $\omega_0 = 1$.



No exercício, $\omega_0 = 2$,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}^5(t)dt = \frac{115\pi}{192}$$

Para registro:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Sa}^n(\omega_0 t/2)dt$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I_n	$\frac{2\pi}{\omega_0}$	$\frac{2\pi}{\omega_0}$	$\frac{3\pi}{2\omega_0}$	$\frac{4\pi}{3\omega_0}$	$\frac{115\pi}{96\omega_0}$	$\frac{11\pi}{10\omega_0}$	$\frac{5887\pi}{5760\omega_0}$	$\frac{302\pi}{315\omega_0}$	$\frac{259723\pi}{286720\omega_0}$	$\frac{15619\pi}{18144\omega_0}$

3ª Questão: Determine a transformada de Fourier de

$$x(t) = \frac{t}{t^2+4}$$

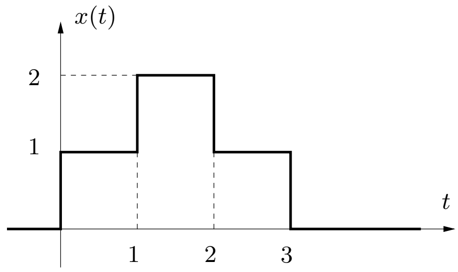
$$\mathcal{F}\left\{\frac{t}{t^2+4}\right\} = j\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+4}\right\}$$

$$\mathcal{F}\{\exp(-a|t|\} = \frac{2a}{\omega^2+a^2}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+4}\right\} = \frac{\pi}{2}\exp(-2|\omega|) = \frac{\pi}{2}\big(\exp(-2\omega)u(\omega)+\exp(2\omega)u(-\omega)\big)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{t}{t^2+4}\right\} = j\frac{\pi}{2}\frac{d}{d\omega}\big(\exp(-2\omega)u(\omega)+\exp(2\omega)u(-\omega)\big) =$$

$$= j\frac{\pi}{2}\big(-2\exp(-2\omega)u(\omega)+\delta(\omega)+2\exp(2\omega)u(-\omega)-\delta(-\omega)\big) = j\pi\big(\exp(2\omega)u(-\omega)-\exp(-2\omega)u(\omega)\big)$$

4ª Questão: Determine a transformada de Laplace do sinal $x(t)$ mostrado na figura abaixo.



$$x(t) = u(t)+u(t-1)-u(t-2)-u(t-3), \quad \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s}\big(1+\exp(-s)-\exp(-2s)-\exp(-3s)\big)$$

5ª Questão: a) Determine a solução forçada de

$$(p^2+p+1)y = x, \qquad x(t) = 10\exp(-t)\cos(t)$$

b) Determine a solução de

$$(p^2+p+1)y = x, \qquad x(t) = 10\exp(-t)\cos(t) \ , \ y(0)=0 \ , \ \dot{y}(0)=10$$

c) Obtenha uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais cuja solução seja solução da equação diferencial não homogênea descrita no item b).

$$y_f(t) = -10\exp(-t)\ \mathrm{sen}(t)$$

$$y(t) = -10\exp(-t)\ \mathrm{sen}(t) + \frac{40\sqrt{3}}{3}\exp(-t/2)\ \mathrm{sen}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\Big) =$$

$$= -10\exp(-t)\ \mathrm{sen}(t) + \frac{20\sqrt{3}}{3j}\exp\big((-1+j\sqrt{3})t/2\big) - \frac{20\sqrt{3}}{3j}\exp\big((-1-j\sqrt{3})t/2\big)$$

$$(p^2+2p+2)(p^2+p+1)y = 0, \qquad y(0)=0,\ \dot{y}(0)=10,\ \ddot{y}(0)=0,\ \dddot{y}\ (0)=-20$$

6ª Questão: Determine a resposta ao degrau (condições iniciais nulas) para o sistema

$$(p^2+4p+8)y = x$$

$$y_u(t) = \Big(-1/8\exp(-2t)\cos(2t) - 1/8\exp(-2t)\ \mathrm{sen}(2t) + 1/8\Big)u(t)$$

7ª Questão: Determine os pontos de equilíbrio e o comportamento qualitativo do sistema linearizado (assintoticamente estável, estável ou instável) para o sistema em cada um dos pontos de equilíbrio

$$\dot{v}_1 = 2v_1v_2 - v_1 - v_2 \ , \ \dot{v}_2 = v_1(1-v_1v_2)$$

$$(0,0), \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \quad \text{(Assint. estável)}$$

$$(1,1), \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = 0, 0 \quad \text{(Instável)}$$

8ª Questão: Considere o sistema

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine a resposta à entrada nula para a condição inicial $v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}'$

$$x_{en}(t) = \exp(-t) \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ 1 + 2t \end{bmatrix} \ , \ y_{en}(t) = \exp(-t) - 2t\exp(-t)$$

b) Determine a resposta ao estado inicial nulo para $x(t) = 1$

$$y_{cin}(t) = t\exp(-t)$$

c) Determine um sistema homogêneo e as condições iniciais que produzam a mesma solução do sistema acima para $v(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}'$ e $x(t) = 1$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9ª Questão: Determine ρ_0 e ρ_1 tais que

$$\operatorname{sen}(A) = \rho_0 \mathrm{I} + \rho_1 A \ , \ A = \frac{\pi}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_0 = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}, \quad \rho_1 = \frac{1}{2}$$

10ª Questão: Mostre que se o sinal real $x(t)$ é de duração limitada, isto é,

$$x(t) = 0 \ , \ |t| > t_M,$$

então sua transformada de Fourier $X(\omega)$ pode ser determinada de maneira única a partir das amostras $X(k\pi/t_M)$ igualmente espaçadas de intervalos π/t_M, ou seja,

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\pi/t_M)\mathrm{Sa}(\omega t_M - k\pi) \quad , \quad \mathrm{Sa}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

$$X_A(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\pi/t_M)\mathrm{Sa}(\omega t_M - k\pi) = X(\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\pi/t_M) * \mathrm{Sa}(\omega t_M)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X_A(\omega)\} = x_A(t) = 2\pi x(t) * \mathcal{F}^{-1}\Big\{\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - k\pi/t_M)\Big)\Big\}\mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{Sa}(\omega t_M)\}$$

Como

$$\mathcal{F}\Big\{\frac{t_M}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t - k2t_M)\Big\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega - k\underbrace{\pi/t_M}_{\omega_0}), \quad \mathcal{F}\Big\{\frac{1}{2t_M}G_{2t_M}(t)\Big\} = \mathrm{Sa}(\omega t_M)$$

e $x(t) = 0$ para $|t| > t_M$

$$X_A(t) = 2\pi x(t) * \Big(\frac{t_M}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t - k2t_M)\Big)\Big(\frac{1}{2t_M}G_{2t_M}(t)\Big) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(t - k2t_M)G_{2t_M}(t) = x(t)$$