P1 — Solução

1ª Questão: Considere a equação a diferenças

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n] \quad , \quad y[n] = x[n] = 0 \ , \ n < 0$$

Determine a sequência $x[n]$ não nula de menor comprimento que produz como saída um sinal $y[n]$ finito. O sinal $y[n]$ é finito se $y[n] = 0$ para $n \geq n_0$.

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2}, \quad h[n] = 2^n u[n], \qquad Y(z) = H(z)X(z)$$

Escolhendo $x[n]$ para que $Y(z) = a$, $y[n] = a\delta[n]$: $x[n] = a(\delta[n] - 2\delta[n-1]), \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

2ª Questão: Determine a transformada Z inversa (isto é, a sequência $x[n]$) de

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-2)^3} \quad , \quad |z| < 2$$

$$Y(z) = X(z^{-1}) = \frac{z^{-2}}{(z^{-1}-2)^3} = -\frac{1}{2^3}\frac{z}{(z-1/2)^3}, \quad |z| > 1/2$$

$$y[n] = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n] = -n(n-1)2^{-n-2}u[n]$$

$$x[n] = y[-n] \quad \Rightarrow \quad x[n] = -n(n+1)2^{n-2}u[-n]$$

3ª Questão: Determine a média, a variância e as probabilidades $\Pr\{\mathbb{X} = 0\}$, $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$ e $\Pr\{\mathbb{X} = 2\}$ de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ que tem como transformada Z

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{z^2}{(z^2-2)^2} \quad , \quad |z| < \sqrt{2}$$

média $= 6$, momento de segunda ordem $= 52$, variância $= 16$

Taylor: $1/4z^2 + 1/4z^4 + 3/16z^6 + 1/8z^8 + 5/64z^{10} + 3/64z^{12} + 7/256z^{14}$

4ª Questão: a) Determine a solução forçada de

$$(p^2 - p - 2)y[n] = 2^{n+1} \quad \Rightarrow \quad y_f[n] = (1/3)n2^n$$

b) Determine a solução de

$$(p^2 - p - 2)y[n] = 2^{n+1} \quad , \quad y[0] = 0 \ , \ y[1] = 1 \quad \Rightarrow \quad y[n] = (1/9)2^n - (1/9)(-1)^n + (1/3)n2^n$$

c) Obtenha uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais cuja solução seja solução da equação não homogênea descrita no item b).

$$(p+1)(p-2)^2 y[n] = 0 \ , \quad y[0] = 0 \ , \ y[1] = 1 \ , \ y[2] = 3$$

5ª Questão: Determine a resposta ao impulso $h[n]$ (condições iniciais nulas) para o sistema

$$y[n+2] - 4y[n] = x[n]$$

$$Y(z) = \frac{1}{(z+2)(z-2)} = -\frac{1}{4} + \frac{(1/8)z}{z-2} + \frac{(1/8)z}{z+2} = \frac{1/4}{z-2} + \frac{-1/4}{z+2} = z^{-1}\left(\frac{0.25z}{z-2} + \frac{-0.25z}{z+2}\right)$$

$$y[n] = -\frac{1}{4}\delta[n] + (\frac{1}{8}2^n + \frac{1}{8}(-2)^n)u[n] = (\frac{1}{4}2^{n-1} - \frac{1}{4}(-2)^{n-1})u[n-1]$$

6ª Questão: a) Determine a resposta ao impulso do sistema

$$y(t) = \int_{t-2}^{t+2} x(\beta)\exp(t-\beta)d\beta$$

$$h(t) = \exp(t)G_4(t)$$

b) Classifique quanto à: linearidade, invariância no tempo, causalidade e BIBO estabilidade.
linear invariante no tempo, não causal e bibo-estável

c) Determine e esboce a resposta do sistema para a entrada $x(t) = G_4(t)$

$$(\exp(t+2) - \exp(-2))G_4(t+2) - (\exp(t-2) - \exp(2))G_4(t-2)$$

7ª Questão: Determine os coeficientes α_1 e α_2 que minimizam o erro médio quadrático da representação da função $f(t)$ no espaço linear gerado por $\{g_1(t), g_2(t)\}$

$$f(t) = tG_3(t-1.5) \ , \ g_1(t) = G_1(t-0.5) - G_1(t-1.5) \ , \ g_2(t) = G_2(t-2)$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1 \\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 \\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2/3 \\ 7/3\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}0.667 \\ 2.33\end{bmatrix}$$

8ª Questão: Determine os coeficientes da série exponencial de Fourier de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t-k5\pi) \quad , \quad p(t) = -G_1(t+1) + (1-t)G_1(t-0.5)$$

$$c_0 = -\frac{1}{10\pi} \ , \ c_k = \frac{1}{2\pi jk}\left(-\exp(3jk/5) + \exp(jk/5) + 1\right) - \frac{5}{4\pi k^2}\left(-1 + \exp(-2jk/5)\right)$$