Sistemas Lineares Variantes no Tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

$A_{n\times n}(\cdot)$, $B_{n\times p}(\cdot)$, $C_{q\times n}(\cdot)$, $D_{q\times p}(\cdot)$: funções contínuas do tempo

$\Longrightarrow$ solução única para x_0 e $u_{[t_0,\infty)}$ dados

Soluções da Equação Homogênea: $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

Teorema

O conjunto de todas as soluções de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ forma um espaço linear n-dimensional.

• Sejam ψ_1 e ψ_2 soluções quaisquer de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Neste caso, para α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) &= \alpha_1\frac{d}{dt}\psi_1 + \alpha_2\frac{d}{dt}\psi_2 \\ &= \alpha_1 A(t)\psi_1 + \alpha_2 A(t)\psi_2 \\ &= A(t)(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) \end{aligned}$$

$$(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) \in \Psi$$

Ψ : conjunto de todas as soluções de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

Matriz Fundamental

Considere o sistema homogêneo de dimensão n

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

Para cada condição inicial $x_i(t_0)$, existe uma solução única $\psi_i(t)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Essas soluções podem ser arranjadas em uma matriz quadrada de ordem n

$$\psi = \left[\begin{array}{cccc} \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_n \end{array} \right]$$

$$\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t)$$

Se $\psi(t_0)$ é não singular ou equivalentemente as n condições iniciais são linearmente independentes, $\psi(t)$ é chamada **Matriz Fundamental** de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

- Como as condições iniciais são arbitrárias, a matriz fundamental não é única.

- Uma matriz fundamental $\psi(t)$ é não singular para todo t

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1(t) = x_1(t_0) \\ \\ \dot{x}_2 = t x_1 \quad \rightarrow \quad x_2(t) = 0.5t^2 x_1(t_0) - 0.5t_0^2 x_1(t_0) + x_2(t_0) \end{cases}$$

Se $t_0 = 0$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se $t_0 = 0$, $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 0$

$$\psi_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix} \quad : \quad \text{Matriz Fundamental}$$

$$\dot{\psi} = A(t)\psi \quad ; \quad \psi(t_0) = H$$

H : Matriz não singular constante

Matriz de Transição de Estados

Seja ψ qualquer matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$. Diz-se então que

$$\Phi(t, t_0) \triangleq \psi(t)\psi^{-1}(t_0)$$

é a **matriz de transição de estados** de $\dot{x} = A(t)x$.

- $\Phi(t, t_0)$ também é a solução única de

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

com a condição inicial $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$

Propriedades

$$\Phi(t, t) = \mathbf{I}$$

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \psi(t_0)\psi^{-1}(t) = \Phi(t_0, t)$$

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0)$$

Exemplo

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t_0^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5t_0^2 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5(t^2 - t_0^2) & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedade

A matriz de transição de estados $\Phi(t, t_0)$ é unicamente determinada por $A(t)$ e independe da matriz fundamental ψ escolhida.

Sejam ψ_1, ψ_2 duas matrizes fundamentais diferentes de $\dot{x} = A(t)x$

$$\exists\, P \quad : \quad \psi_2 = \psi_1 P \quad , \quad P \text{ não singular}$$

i-ésima coluna de P = representação da i-ésima coluna de ψ_2 na base ψ_1

Logo: $\Phi(t, t_0) = \psi_2(t)\psi_2^{-1}(t_0) = \psi_1(t)PP^{-1}\psi_1^{-1}(t_0) = \psi_1(t)\psi_1^{-1}(t_0)$

$$\Longrightarrow \quad \Phi(t, t_0) \text{ é única}$$

- Difícil de obter genericamente
- Se $A(t)$ é triangular

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

pode-se resolver a primeira equação em $x_1(t)$ e substituir na segunda.

- Se $A(t)$ satisfaz

$$A(t)\Big(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \Big) = \Big(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \Big) A(t)$$

para todo t_0 e t, então

$$\Phi(t, t_0) = \exp\Big(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \Big)^k$$

por exemplo, $A(t)$ diagonal ou $A(t) = A$. Para $A(t) = A$,

$$\Phi(t, t_0) = \exp[A(t - t_0)] = \Phi(t - t_0) \quad ; \quad \psi(t) = \exp(At)$$

A solução da equação de estado

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

é dada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$= \Phi(t, t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right]$$

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, \tau)$$

sendo $\Phi(t, \tau)$ a matriz de transição de estado de $\dot{x} = A(t)x$

Derivando,

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0)x_0 + \Phi(t, t)B(t)u(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$= A(t)\left[\Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right] + B(t)u(t)$$

$$= A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Quanto à condição inicial,

$$x(t_0) = \Phi(t_0, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_0} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = x_0$$

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Se $u \equiv 0$,

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$$

Se $x_0 = 0$,

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Genericamente,

$$x(t) \quad = \quad \text{Resposta à Entrada Nula} + \text{Resposta ao Estado Nulo}$$

Saída do sistema

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

$$= C(t)\Phi(t, t_0)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right] + D(t)u(t)$$

Se $x_0 = 0$,

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \left[C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau)\right] u(\tau)d\tau$$

$$\triangleq \int_{t_0}^{t} G(t, \tau)u(\tau)d\tau$$

$G(t, \tau)$: matriz resposta ao impulso aplicado no instante τ

Sistemas Discretos Variantes no Tempo

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + E(k)u(k) \end{aligned}$$

• Solução pode ser computada conhecendo-se $x(k_0) = x_0$ e $u(k)$ para $k \geq k_0$

Matriz de transição de estados discreta: é a solução de

$$\Phi(k+1, k_0) = A(k)\Phi(k, k_0) \quad ; \quad \Phi(k_0, k_0) = \mathbf{I}$$

para $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$. A solução pode ser obtida diretamente para $k > k_0$

$$\Phi(k, k_0) = A(k-1)A(k-2)\cdots A(k_0) \quad ; \quad \Phi(k_0, k_0) = \mathbf{I}$$

• No caso contínuo, a matriz de transição de estados é não singular para todo t e governa a propagação do estado no sentido direto e no sentido reverso do tempo. No caso discreto, A pode ser singular e $\Phi(k, k_0)$ pode não ser definida. $\Phi(k, k_0)$ é definida apenas para $k \geq k_0$ e governa a propagação do estado no sentido direto. Assim,

$$\Phi(k, k_0) = \Phi(k, k_1)\Phi(k_1, k_0)$$

vale apenas para $k \geq k_1 \geq k_0$. A solução do sistema para $k > k_0$ é dada por

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x_0 + \sum_{m=k_0}^{k-1} \Phi(k, m+1)B(m)u(m)$$

$$y(k) = C(k)\Phi(k, k_0)x_0 + C(k)\sum_{m=k_0}^{k-1} \Phi(k, m+1)B(m)u(m) + D(k)u(k)$$

Equações Equivalentes Variantes no Tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Seja $P(t)$ uma matriz $n \times n$. Assume-se que $P(t)$ é não singular e que $P(t)$ e $\dot{P}(t)$ possuem elementos contínuos para todo t. Definindo $\bar{x} = P(t)x$ o sistema

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}(t)u(t) \\ y(t) &= \bar{C}(t)\bar{x}(t) + \bar{D}(t)u(t) \end{aligned}$$

com

$$\bar{A}(t) = [P(t)A(t) + \dot{P}(t)]P^{-1}(t)$$

$$\bar{B}(t) = P(t)B(t) \quad ; \quad \bar{C}(t) = C(t)P^{-1}(t) \quad ; \quad \bar{D}(t) = D(t)$$

é um sistema (algebricamente) equivalente ao sistema anterior.

Seja $\psi(t)$ uma matriz fundamental do sistema original. Então, $\bar{\psi}(t) \triangleq P(t)\psi(t)$ é uma matriz fundamental do sistema equivalente.

Por definição, $\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t)$ e $\psi(t)$ é não singular para todo t. Como o rank de uma matriz não se altera ao ser multiplicada por uma matriz não singular $P(t)$, $P(t)\psi(t)$ também é não singular para todo t. Derivando

$$\frac{d}{dt}[P(t)\psi(t)] = \dot{P}(t)\psi(t) + P(t)\dot{\psi}(t) = \dot{P}(t)\psi(t) + P(t)A(t)\psi(t) =$$

$$= [\dot{P}(t) + P(t)A(t)][P^{-1}(t)P(t)]\psi(t) = \bar{A}(t)[P(t)\psi(t)]$$

Teorema

Seja A_0 uma matriz arbitrária constante. Então, existe uma transformação de equivalência $P(t)$ que transforma o sistema em um sistema equivalente com $\bar{A}(t) = A_0$.

Seja $\psi(t)$ uma matriz fundamental do sistema original. Diferenciando a igualdade $\psi^{-1}(t)\psi(t) = \mathbf{I}$ obtém-se

$$\dot{\psi}^{-1}(t)\psi(t) + \psi^{-1}(t)\dot{\psi}(t) = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{\psi}^{-1}(t) = -\psi^{-1}(t)A(t)\psi(t)\psi^{-1}(t) = -\psi^{-1}(t)A(t)$$

Como $\bar{A}(t) = A_0$, $\bar{\psi}(t) = \exp(A_0 t)$ é uma matriz fundamental de $\dot{\bar{x}} = \bar{A}(t)\bar{x} = A_0\bar{x}$. Como $\bar{\psi}(t) = P(t)\psi(t)$, $P(t)$ pode ser obtido como

$$P(t) = \bar{\psi}(t)\psi^{-1}(t) = \exp(A_0 t)\psi^{-1}(t)$$

Calculando $\bar{A}(t)$:

$$\bar{A}(t) = [P(t)A(t) + \dot{P}(t)]P^{-1}(t) =$$

$$= [\,\exp(A_0 t)\psi^{-1}(t)A(t) + A_0\exp(A_0 t)\psi^{-1}(t) +$$
$$+ \exp(A_0 t)\dot{\psi}^{-1}(t)]\psi(t)\exp(-A_0 t)$$

$$\bar{A}(t) = A_0\exp(A_0 t)\psi^{-1}(t)\psi(t)\exp(-A_0 t) = A_0$$

• Se $A_0 = \mathbf{0}$, então $P(t) = \psi^{-1}(t)$ e as matrizes do sistema equivalente são dadas por

$$\bar{A}(t) = \mathbf{0} \;\; ; \;\; \bar{B}(t) = \psi^{-1}(t)B(t) \;\; ; \;\; \bar{C}(t) = C(t)\psi(t) \;\; ; \;\; \bar{D}(t) = D(t)$$

• Pode ser feito com qualquer sistema linear variante no tempo, conhecendo-se a matriz fundamental

Matriz Resposta ao Impulso

$$G(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) =$$
$$= C(t)\psi(t)\psi^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

Para o sistema equivalente

$$\bar{G}(t,\tau) = \bar{C}(t)\bar{\psi}(t)\bar{\psi}^{-1}(\tau)\bar{B}(\tau) + \bar{D}(t)\delta(t-\tau)$$

$$= C(t)P^{-1}P(t)\psi(t)\psi^{-1}(\tau)P^{-1}(\tau)P(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

$$= C(t)\psi(t)\psi^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) = G(t,\tau)$$

• A matriz resposta ao impulso é preservada em uma transformação de equivalência

• O mesmo não acontece com a matriz $A(t)$ (por exemplo, $\bar{A}(t) = \mathbf{0}$)

• No caso invariante no tempo, as transformações de equivalência preservam todas as propriedades da equação original

Transformação de Lyapunov

• Se $P(t)$ é não singular, $P(t)$ e $\dot{P}(t)$ são contínuas e $P(t)$ e $P^{-1}(t)$ são limitadas para todo t, tem-se uma **transformação de Lyapunov** (e um sistema Lyapunov equivalente).

• Caso particular de transformação de Lyapunov: $P(t) = P$

• Em geral, o teorema anterior (transformação de equivalência com $\bar{A}(t) = A_0$) não se aplica para transformações de Lyapunov $P(t)$. Uma exceção ocorre quando $A(t)$ é periódica.

Equações de Estado Periódicas

$A(t)$ é periódica com período T se

$$A(t+T) = A(t)$$

para todo t e algum T positivo constante. Se $\psi(t)$ é uma matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$, ou seja, $\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t)$ com $\psi(0)$ não singular, tem-se

$$\dot{\psi}(t+T) = A(t+T)\psi(t+T) = A(t)\psi(t+T)$$

e portanto $\psi(t+T)$ também é uma matriz fundamental. Além disso,

$$\psi(t+T) = \psi(t)\psi^{-1}(0)\psi(T) = \psi(t)Q \quad ; \quad Q \triangleq \psi^{-1}(0)\psi(T)$$

Para essa matriz Q constante e não singular, existe uma matriz constante $\bar{A}$ tal que $\exp(\bar{A}T) = Q$ e portanto

$$\psi(t+T) = \psi(t)\exp(\bar{A}T)$$

Defina $P(t) \triangleq \exp(\bar{A}t)\psi^{-1}(t)$. Note que $P(t)$ é periódica com período T

$$P(t+T) = \exp[\bar{A}(t+T)]\psi^{-1}(t+T) =$$
$$= \exp(\bar{A}t)\exp(\bar{A}T)[\exp(-\bar{A}T)\psi^{-1}(t)] = \exp(\bar{A}t)\psi^{-1}(t) = P(t)$$

Teorema

Seja $\psi(t)$ uma matriz fundamental do sistema periódico com período T dado por $\dot{x} = A(t)x$ e $\bar{A}$ uma matriz constante computada a partir de $\exp(\bar{A}T) = \psi^{-1}(0)\psi(T)$. Com $P(t) = \exp(\bar{A}t)\psi^{-1}(t)$, obtém-se o sistema Lyapunov equivalente

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + P(t)B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)P^{-1}(t)\bar{x}(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Teoria de Floquet

Se $\dot{x} = A(t)x$ e $A(t+T) = A(t)$ para todo t, então uma matriz fundamental é dada por $P^{-1}(t)\exp(\bar{A}t)$ com $P^{-1}(t)$ uma função periódica. Além disso, o sistema $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x}$ é Lyapunov equivalente ao sistema $\dot{x} = A(t)x$.

Realizações de Sistemas Variantes no Tempo

Descrição entrada/saída

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

Equação de Estado (se os parâmetros são concentrados)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Conhecendo-se $\{A(t), B(t), C(t), D(t)\}$, a matriz resposta ao impulso pode ser computada por a partir de

$$G(t,\tau) = C(t)\psi(t)\psi^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

sendo $\psi(t)$ a matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$

- Uma matriz de resposta ao impulso $G(t,\tau)$ é **realizável** se existir $\{A(t), B(t), C(t), D(t)\}$ satisfazendo a expressão acima.

Teorema

Uma matriz de resposta ao impulso é realizável por uma equação dinâmica linear de dimensão finita se e somente se $G(t,\tau)$ (de dimensão $q \times p$) puder ser decomposta em

$$G(t,\tau) = M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) \quad , \quad \forall \;\; t \geq \tau$$

$M_{q\times n} \quad ; \quad N_{n\times p} \quad$ contínuas em t

(necessidade): Se $\{A, B, C, D\}$ é uma realização de $G(t,\tau)$

$$G(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau) =$$

$$= C(t)\psi(t)\psi^{-1}(\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

$$= M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

(suficiência): Se $G(t,\tau) = M(t)N(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$, uma realização de $G(t,\tau)$ é dada por

$$\dot{x} = N(t)u(t)$$

$$y(t) = M(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Note que $\psi(t) = \mathbf{I}$ é uma matriz fundamental de $\dot{x} = \mathbf{0}x$

• Todas as equações dinâmicas equivalentes possuem a mesma matriz de resposta ao impulso, mas $G(t,\tau)$ admite diferentes realizações

Exemplo: considere $g(t) = t\exp(\lambda t)$, ou

$$g(t,\tau) = g(t-\tau) = (t-\tau)\exp[\lambda(t-\tau)]$$

Pode-se escrever

$$g(t-\tau) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda t) & t\exp(\lambda t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tau\exp(-\lambda\tau) \\ \exp(-\lambda\tau) \end{bmatrix}$$

- Uma realização de $g(t) = t\exp(\lambda t)$ (variante no tempo)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t\exp(-\lambda t) \\ \exp(-\lambda t) \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda t) & t\exp(\lambda t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Outra realização: $\mathcal{L}[t\exp(\lambda t)] = \dfrac{1}{(s-\lambda)^2} = \dfrac{1}{s^2 - 2\lambda s + \lambda^2}$

Usando a forma companheira obtém-se a representação invariante no tempo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2\lambda & -\lambda^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$