Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Problema: encontrar a solução para uma determinada condição inicial $x(0)$ e uma entrada $u(t)$.

Solução: pode ser obtida a partir da propriedade

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At) = \exp(At)A$$

Pré-multiplicando a equação diferencial por $\exp(-At)$

$$\exp(-At)\dot{x}(t) - \exp(-At)Ax(t) = \exp(-At)Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\exp(-At)x(t)] = \exp(-At)Bu(t)$$

Integrando de 0 a t

$$\exp(-A\tau)x(\tau)\Big|_{\tau=0}^{t} = \int_0^t \exp(-A\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Portanto

$$\exp(-At)x(t) - \exp(\mathbf{0})x(0) = \int_0^t \exp(-A\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\Longrightarrow \qquad x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau$$

Verificando se a solução satisfaz a equação diferencial e se $x(t) = x(0)$ em $t = 0$:

- Em $t = 0$, $x(0) = \exp(At)x(0) = \mathbf{I}x(0) = x(0)$.
- Computando $\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\Big[\exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau\Big]$$

$$= A\exp(At)x(0) + \int_0^t A\exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau + \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)\Big|_{\tau=t}$$

$$= A\Big(\exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau\Big) + \exp(A0)Bu(t)$$

$$= Ax(t) + Bu(t)$$

pois

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^t f(t,\tau)d\tau = \int_{t_0}^t \Big(\frac{\partial}{\partial t}f(t,\tau)\Big)d\tau + f(t,\tau)\Big|_{\tau=t}$$

Substituindo na equação de saída

$$y(t) = C\exp(At)x(0) + C\int_0^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

De maneira equivalente, usando transformada de Laplace

$$X(s) = (s\mathbf{I} - A)^{-1}[x(0) + BU(s)]$$

$$Y(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}[x(0) + BU(s)] + DU(s)$$

Cálculo de $\exp(At)$

- Método 1

Encontre os autovalores de A;

Encontre o polinômio $h(\lambda)$ de grau $n-1$ igual a $\exp(\lambda t)$ no espectro de A ; $\exp(At) = h(A)$

- Método 2

Encontre a Forma Canônica de Jordan de A, $\hat{A}$; $A = Q\hat{A}Q^{-1}$ e $\exp(At) = Q\exp(\hat{A}t)Q^{-1}$

- Método 3

$$\exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!} \quad \rightarrow \quad \text{(computador)}$$

- Método 4

$$\mathcal{L}[\exp(At)] = (s\mathbf{I} - A)^{-1} \;\; ; \;\; \exp(At) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - A)^{-1}]$$

Note que $(s\mathbf{I} - A)^{-1}$ também é uma função de A, e pode ser computada de várias maneiras.

Exemplo: considere $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$(s\mathbf{I} - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

Autovalores de A: -1, -1. Seja $h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \lambda$. Se $f(\lambda) = (s - \lambda)^{-1}$ iguala os valores de $h(\lambda)$ no espectro de A, então

$$f(-1) = h(-1) \quad \Longrightarrow \quad (s+1)^{-1} = \beta_0 - \beta_1$$

$$f'(-1) = h'(-1) \quad \Longrightarrow \quad (s+1)^{-2} = \beta_1$$

Portanto, $h(\lambda) = [(s+1)^{-1} + (s+1)^{-2}] + (s+1)^{-2}\lambda$ e

$$(s\mathbf{I} - A)^{-1} = h(A) = [(s+1)^{-1} + (s+1)^{-2}]\mathbf{I} + (s+1)^{-2}A$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

Considerando a equação

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

a solução é dada por

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau$$

$$\exp(At) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} (1+t)\exp(-t) & -t\exp(-t) \\ t\exp(-t) & (1-t)\exp(-t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} (1+t)\exp(-t) & -t\exp(-t) \\ t\exp(-t) & (1-t)\exp(-t) \end{bmatrix} x(0) +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\displaystyle\int_0^t (t-\tau)\exp[-(t-\tau)]u(\tau)d\tau \\ \displaystyle\int_0^t [1-(t-\tau)]\exp[-(t-\tau)]u(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

Resposta à entrada nula $\exp(At)x(0)$

$$\exp(At) = Q \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & t\exp(\lambda_1 t) & t^2\exp(\lambda_1 t)/2 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_1 t) & t\exp(\lambda_1 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\lambda_1 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{bmatrix} Q^{-1}$$

• combinação linear de termos do tipo $t^k \exp(\lambda t)$, determinados pelos autovalores e seus índices. São analíticos (isto é, diferenciáveis para todo t).

• se todo autovalor tem parte real negativa, a resposta à entrada nula tende para zero quando $t \to \infty$; se A possui algum autovalor com parte real positiva, a resposta à entrada nula cresce indefinidamente.

• um autovalor com parte real nula mas índice 1 não causa o crescimento ilimitado; se o índice for 2 ou superior, o crescimento ilimitado pode ocorrer. Por exemplo, um autovalor igual a 0 com índice 2 faz com que $\exp(At)$ contenha os termos $\{1, t\}$.

Discretização

Considere o sistema contínuo no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Aproximação:

$$\dot{x}(t) = \lim_{T \to 0} \frac{x(t+T) - x(t)}{T}$$

$$x(t+T) = x(t) + Ax(t)T + Bu(t)T$$

Se os sinais contínuos são computados em instantes discretos $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= (\mathbf{I} + TA)x(kT) + TBu(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT) \end{aligned}$$

- Simples, mas os resultados podem ser imprecisos.

- Considerando que o sinal $u(t)$ é gerado em um computador digital e que em seguida o sinal passa por um conversor digital/analógico, tem-se um sinal linear por partes.

Defina o sinal linear por partes, mudando a cada instante discreto k

$$u(t) = u(kT) \triangleq u(k) \quad \text{para} \quad kT \leq t < (k+1)T$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

Usando a solução da equação diferencial $x(t)$ e computando nos instantes $t = kT$ e $t = (k+1)T$

$$x(k) \triangleq x(kT) = \exp(AkT)x(0) + \int_0^{kT} \exp[A(kT - \tau)]Bu(\tau)d\tau$$

$$x(k+1) \triangleq x[(k+1)T] = \exp[A(k+1)T]x(0) + \\ + \int_0^{(k+1)T} \exp[A((k+1)T - \tau)]Bu(\tau)d\tau$$

Esta última pode ser escrita

$$x(k{+}1) = \exp(AT)\Big[\exp(AkT)x(0) + \int_0^{kT} \exp[A(kT{-}\tau)]Bu(\tau)d\tau\Big] + \\ + \int_{kT}^{(k+1)T} \exp[A(kT + T - \tau)]Bu(\tau)d\tau$$

com a mudança de variável $\alpha = kT + T - \tau$ tem-se

$$x(k+1) = \exp(AT)x(k) + \Big[\int_0^{T} \exp(A\alpha)d\alpha\Big]Bu(k)$$

Assim, obtém-se a equação de estado discreta no tempo

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

Equação Discreta

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

$$A_d = \exp(AT) \quad ; \quad B_d = \Big[\int_0^T \exp(A\tau)d\tau\Big]B$$

• Não há aproximação envolvida; a solução em $t = kT$ é exata se a entrada for mantida constante no intervalo.

Cálculo de B_d

Usando a descrição em série de potência

$$\int_0^T \Big(\mathbf{I} + A\tau + A^2\frac{\tau^2}{2!} + \cdots\Big)d\tau =$$

$$= T\mathbf{I} + \frac{T^2}{2!}A + \frac{T^3}{3!}A^2 + \frac{T^4}{4!}A^3 + \cdots$$

Se A é não singular, a série pode ser computada usando-se

$$A^{-1}\Big(TA + \frac{T^2}{2!}A^2 + \frac{T^3}{3!}A^3 + \cdots + \mathbf{I} - \mathbf{I}\Big) = A^{-1}(\exp(AT) - \mathbf{I})$$

e portanto $B_d = A^{-1}(\exp(AT) - \mathbf{I})B$

Solução do Sistema Discreto

Considere a descrição no espaço de estados

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
y(k) &= Cx(k) + Du(k)
\end{aligned}
$$

Forma geral da solução:

$$
\begin{aligned}
x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Assim, para $k > 0$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} Bu(m)$$

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} CA^{k-1-m} Bu(m) + Du(k)$$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} A^{k-1-m} B u(m)$$

$$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{m=0}^{k-1} CA^{k-1-m} B u(m) + Du(k)$$

• Assim como no caso contínuo, a resposta à entrada nula $A^k x(0)$ apresenta algumas propriedades. Suponha que A tem o autovalor λ_1 com multiplicidade 4 e o autovalor λ_2 com multiplicidade 1. Suponha ainda que A possui a forma de Jordan tal que

$$A^k = Q \begin{bmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & k(k-1)\lambda_1^{k-2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} Q^{-1}$$

• combinação linear de termos do tipo λ^k, $k\lambda^{k-1}$, $k^2\lambda^{k-2}$, determinados pelos autovalores e seus índices.

• se todo autovalor tem magnitude menor que 1, a resposta à entrada nula tende para zero quando $k \to \infty$; se A possui algum autovalor com magnitude maior que 1 a resposta à entrada nula cresce indefinidamente.

• um autovalor com magnitude igual a 1 e índice 1 não causa o crescimento ilimitado; se o índice for 2 ou superior, o crescimento ilimitado pode ocorrer. Por exemplo, um autovalor igual a 1 com índice 2 faz com que A^k contenha os termos $\{1, k\}$.

Equações Dinâmicas Equivalentes

Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Seja $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz não-singular e $\bar{x} = Px$. A equação dinâmica

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) + \bar{D}u(t) \end{aligned}$$

com $\bar{A} = PAP^{-1}$, $\bar{B} = PB$, $\bar{C} = CP^{-1}$ e $\bar{D} = D$ é (algebricamente) **equivalente** à do sistema original, e P é a **transformação de equivalência**

$$\bar{A} = PAP^{-1} = Q^{-1}AQ \quad \Rightarrow \quad Q\bar{A} = A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \bar{A} = \begin{bmatrix} Aq_1 & Aq_2 & \cdots & Aq_n \end{bmatrix}$$

i-ésima coluna de $\bar{A}$: representação de Aq_i na base $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$

- A e $\bar{A}$ são similares e têm os mesmos autovalores

$$\bar{\Delta}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \bar{A}) = \det[P(\lambda\mathbf{I} - A)P^{-1}] =$$

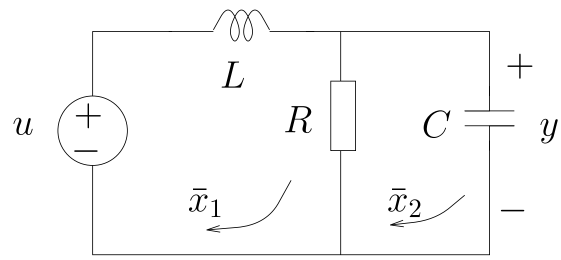
$$= \det(P)\det(\lambda\mathbf{I} - A)\det P^{-1} = \det(\lambda\mathbf{I} - A) = \Delta(\lambda)$$

- Os sistemas têm a mesma função de transferência

$$\bar{G}(s) = \bar{C}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D} =$$

$$= CP^{-1}[P(s\mathbf{I} - A)P^{-1}]^{-1}PB + D = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D = G(s)$$

Exemplo: Circuito RLC



x_1 : corrente no indutor
x_2 : tensão no capacitor
$\bar{x}_1$: corrente na malha 1
$\bar{x}_2$: corrente na malha 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & R/L \\ -R/L & R/L - 1/RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 1/L \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} R & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

$R = 1\ \Omega$; $L = 1$ H ; $C = 1$ F

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \bar{x} = Px$$

Dois sistemas são **equivalentes ao estado nulo** se possuem a mesma matriz de transferência

$$C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D = \bar{C}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}$$

Usando a expressão de série de potências para $(s\mathbf{I} - A)^{-1}$

$$D + CBs^{-1} + CABs^{-2} + CA^2Bs^{-3} + \cdots =$$

$$= \bar{D} + \bar{C}\bar{B}s^{-1} + \bar{C}\bar{A}\bar{B}s^{-2} + \bar{C}\bar{A}^2\bar{B}s^{-3} + \cdots$$

Teorema

Dois sistemas dinâmicos descritos por equações de estado $\{A, B, C, D\}$ e $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}\}$ são equivalentes ao estado nulo (têm a mesma matriz de transferência) se e somente se $D = \bar{D}$ e

$$CA^mB = \bar{C}\bar{A}^m\bar{B} \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Formas Canônicas (rotina `canon` do Matlab)

- Forma companheira: representação de A na base

$$Q = \left[\; b_1 \;\; Ab_1 \;\; \cdots \;\; A^{n-1}b_1 \;\right]$$

sendo b_1 a primeira coluna de B

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4$$

Forma Canônica Modal

Considere A com dois autovalores reais e um par complexo conjugado (dados por λ_1, λ_2, $\alpha + j\beta$ e $\alpha - j\beta$). A representação na base formada pelos autovetores (q_1, q_2, q_3 e q_4, respectivamente, com q_3 e q_4 complexo conjugados) fornece

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ \quad \text{(Jordan)}$$

$\hat{A}$ pode ser transformada em uma matriz similar real. Defina

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5j \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5j \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & j & -j \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \bar{Q}^{-1}\hat{A}\bar{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix} \rightarrow \textbf{Forma modal}$$

As duas transformações podem ser combinadas: $\bar{A} = \bar{Q}^{-1}Q^{-1}AQ\bar{Q}$

Note que

$$Q\bar{Q} \triangleq P^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5j \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5j \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \mathrm{Re}\,(q_3) & \mathrm{Im}\,(q_3) \end{bmatrix}$$

lembrando que q_3 e q_4 são complexo conjugados.

Matlab: `[Am,Bm,Cm,Dm,P]=canon(A,B,C,D,'modal')`

Exemplo: forma modal de uma matriz com autovalores λ_1, $\alpha_1 \pm j\beta_1$ e $\alpha_2 \pm j\beta_2$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 & \mathrm{Re}\,(q_2) & \mathrm{Im}\,(q_2) & \mathrm{Re}\,(q_4) & \mathrm{Im}\,(q_4) \end{bmatrix}$$

q_1, q_2 e q_4 são autovetores associados com λ_1, $\alpha_1 + j\beta_1$ e $\alpha_2 + j\beta_2$, respectivamente.

Forma Canônica Modal: autovalores complexos com MA > 1

Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ com autovalores complexos $\lambda_1 = \sigma + j\omega$ e $\lambda_2 = \sigma - j\omega$, ambos de multiplicidade algébrica igual a 2. A representação de A na forma de Jordan é

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

A representação de A na forma canônica modal é

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Exemplo: A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -15625 & 5000 & -650 & 40 \end{bmatrix}$$

possui forma de Jordan e forma modal respectivamente dadas por

$$\begin{bmatrix} 10+j5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10+j5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10-j5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-j5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 & 0 \\ -5 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

Realizações

Considere um sistema linear invariante no tempo descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

A descrição entrada/saída (matriz de transferência) pode ser computada (de maneira única) a partir da equação de estado

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

• Dada uma matriz de transferência $G(s)$, encontrar uma descrição no espaço de estados (**realização**)

Uma matriz de transferência é **realizável** se existe um sistema de equações de estado de dimensão finita que o representa. Ou, simplesmente, se existem matrizes A, B, C e D tais que

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

$\{A, B, C, D\}$ é uma **realização** de $G(s)$

• Nem toda $G(s)$ admite uma realização (por exemplo, sistema a parâmetros distribuídos). Se $G(s)$ é realizável, possui infinitas realizações (sistemas equivalentes).

Teorema

Uma matriz de transferência é realizável se e somente se $G(s)$ é uma matriz racional própria.

$$C(s\mathbf{I}-A)^{-1}B = \frac{1}{\det(s\mathbf{I}-A)}C[\text{Adj }(s\mathbf{I}-A)]B$$

• Note que se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(s\mathbf{I}-A)$ tem grau n. Todo elemento de Adj $(s\mathbf{I}-A)$ é um determinante de uma submatriz $(n-1)\times(n-1)$ de $(s\mathbf{I}-A)$, e suas combinações lineares têm no máximo grau $(n-1)$. Assim, $C(s\mathbf{I}-A)^{-1}B$ é uma matriz racional estritamente própria. Se $D \neq \mathbf{0}$, $C(s\mathbf{I}-A)^{-1}B + D$ é própria ($G(\infty) = D$). Como conclusão, se $G(s)$ é realizável, $G(s)$ é uma matriz racional própria.

• Mostrando a outra parte, isto é, se $G(s)$ é uma matriz $q \times p$ racional própria, então existe uma realização. Suponha que $G(s)$ é decomposto na forma

$$G(s) = G_{ep}(s) + G(\infty)$$

com $G_{ep}(s)$ correspondendo à parte estritamente própria. Seja o polinômio mônico

$$d(s) = s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \cdots + \alpha_{r-1}s + \alpha_r$$

o mínimo denominador comum de todos os elementos de $G_{ep}(s)$. Então, $G_{ep}(s)$ pode ser escrito na forma

$$G_{ep}(s) = \frac{1}{d(s)}[N(s)] = \frac{1}{d(s)}[N_1 s^{r-1} + N_2 s^{r-2} + \cdots + N_{r-1}s + N_r]$$

sendo N_i matrizes constantes $q \times p$.

O conjunto de equações

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1\mathbf{I}_p & -\alpha_2\mathbf{I}_p & \cdots & -\alpha_{r-1}\mathbf{I}_p & -\alpha_r\mathbf{I}_p \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_{r-1} & N_r \end{bmatrix} x + G(\infty)u$$

é uma realização de $G(s)$.

• $A(rp \times rp)$ está na forma bloco-companheira, r linhas e r colunas de matrizes $p \times p$; $B(rp \times p)$, $C(q \times rp)$ consiste de r matrizes N_i, cada qual $q \times p$. A realização de dimensão rp é chamada **forma canônica controlável**.

Para mostrar que de fato esta é uma realização de $G(s)$, defina

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_r \end{bmatrix} \triangleq (s\mathbf{I} - A)^{-1}B$$

sendo que cada bloco Z_i é $p \times p$ e Z é $rp \times p$. Calculando a matriz de transferência da realização, tem-se

$$C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + G(\infty) = N_1Z_1 + N_2Z_2 + \cdots + N_rZ_r + G(\infty)$$

Re-escrevendo a expressão de $Z = (s\mathbf{I} - A)^{-1}B$ tem-se

$$(s\mathbf{I} - A)Z = B \quad \Longrightarrow \quad sZ = AZ + B$$

Levando em conta a forma bloco companheira de A, do segundo ao último bloco da equação acima tem-se

$$sZ_2 = Z_1 \ , \quad sZ_3 = Z_2 \ , \quad \dots \ , \quad sZ_r = Z_{r-1}$$

e portanto

$$Z_2 = \frac{1}{s}Z_1 \ , \quad Z_3 = \frac{1}{s^2}Z_1 \ , \quad \dots \ , \quad Z_r = \frac{1}{s^{r-1}}Z_1$$

que substituído no primeiro bloco fornece

$$sZ_1 = -\alpha_1 Z_1 - \alpha_2 Z_2 - \cdots - \alpha_r Z_r + \mathbf{I}_p$$

$$= -\Big(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{s} + \cdots + \frac{\alpha_r}{s^{r-1}}\Big)Z_1 + \mathbf{I}_p$$

Usando a definição do polinômio $d(s)$, pode-se escrever

$$\Big(s + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{s} + \cdots + \frac{\alpha_r}{s^{r-1}}\Big)Z_1 = \frac{d(s)}{s^{r-1}}Z_1 = \mathbf{I}_p$$

Assim,

$$Z_1 = \frac{s^{r-1}}{d(s)}\mathbf{I}_p \ , \quad Z_2 = \frac{s^{r-2}}{d(s)}\mathbf{I}_p \ , \quad \dots \ , \quad Z_r = \frac{1}{d(s)}\mathbf{I}_p$$

Finalmente, substituindo na expressão da função de transferência

$$C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + G(\infty) =$$

$$= \frac{1}{d(s)}[N_1 s^{r-1} + N_2 s^{r-2} + \cdots + N_{r-1}s + N_r] + G(\infty)$$

e portanto de fato a equação de estado é uma realização de $G(s)$.

Exemplo

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{4s-10}{2s+1} & \dfrac{3}{s+2} \\ \dfrac{1}{(2s+1)(s+2)} & \dfrac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{-12}{2s+1} & \dfrac{3}{s+2} \\ \dfrac{1}{(2s+1)(s+2)} & \dfrac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

O polinômio mônico que é mínimo denominador comum de $G_{ep}(s)$ é $d(s) = (s+0.5)(s+2)^2 = s^3 + 4.5s^2 + 6s + 2$ e portanto

$$G_{ep}(s) = \frac{1}{s^3 + 4.5s^2 + 6s + 2} \begin{bmatrix} -6(s+2)^2 & 3(s+2)(s+0.5) \\ 0.5(s+2) & (s+1)(s+0.5) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d(s)} \left(\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} -24 & 7.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -24 & 3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \right)$$

Realização de $G(s)$ (de dimensão 6)

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -4.5 & 0 & -6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4.5 & 0 & -6 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -6 & 3 & -24 & 7.5 & -24 & 3 \\ 0 & 1 & 0.5 & 1.5 & 1 & 0.5 \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Caso particular $p = 1$ (SIMO).

Por simplicidade, assuma $r = 4$ e $q = 2$ (porém a discussão se aplica para quaisquer outros valores de r e q). Então

$$G(s) = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4} \begin{bmatrix} \beta_{11}s^3 + \beta_{12}s^2 + \beta_{13}s + \beta_{14} \\ \beta_{21}s^3 + \beta_{22}s^2 + \beta_{23}s + \beta_{24} \end{bmatrix}$$

A realização é obtida aplicando-se o resultado anterior

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} u$$

• Esta forma canônica controlável pode ser obtida diretamente dos coeficientes de $G(s)$ por inspeção.

• Há várias outras maneiras de se realizar uma matriz de transferência própria

• Comando Matlab `[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)` gera a forma canônica controlável acima para sistemas SIMO