Realimentação de Estado: sistemas MIMO

Considere o sistema de ordem n com p entradas e q saídas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Realimentação de estado: $u = r - Kx \quad , \quad K \in \Re^{p \times n}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)u + Br \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Teorema: O par $(A - BK, B)$, para qualquer $K \in \Re^{p \times n}$, é controlável se e somente se o par (A, B) for controlável.

A prova é similar à do caso monovariável. Para um sistema com $n = 4$, a matriz de controlabilidade em malha fechada é dada por

$$\mathfrak{C}_f = \mathfrak{C} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & -KB & -K(A-BK)B & -K(A-BK)^2B \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & -KB & -K(A-BK)B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & -KB \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } \mathfrak{C} = n \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rank } \mathfrak{C}_f = n$$

Teorema: Todos os autovalores de $(A - BK)$ podem ser arbitrariamente alocados (desde que os autovalores complexo conjugados apareçam em pares) através de uma escolha apropriada de K se e somente se (A, B) for controlável.

Se (A, B) não for controlável, então existe uma transformação de similaridade que coloca o sistema na forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u$$

Projeto Cíclico

O problema MIMO é transformado em um problema SISO e então aplica-se o resultado de alocação de sistemas monovariáveis.

Uma matriz A é cíclica se seu polinômio mínimo é igual ao polinômio característico. Em termos da forma de Jordan, uma matriz é cíclica se e somente se houver um único bloco de Jordan associado a cada autovalor distinto.

Teorema: Se o par (A, B) é controlável e A é cíclica, então para quase todo vetor $v \in \Re^{p\times 1}$, o par (A, Bv) é controlável.

• possuir autovalores distintos é uma condição suficiente para ser cíclica.

Idéia básica: assumindo (sem perda de generalidade) A na forma de Jordan e B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; Bv = B \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \alpha \\ \times \\ \beta \end{bmatrix}$$

Há apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor e portanto A é cíclica; a condição para que o par (A, B) seja controlável é que a terceira e a última linhas de B sejam não nulas.

A condição para que (A, Bv) seja controlável é que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. Como

$$\alpha = v_1 + 2v_2 \quad ; \quad \beta = v_2$$

ou α ou β valem zero se e somente se $v_1 = v_2 = 0$ ou $v_1 = -2v_2$. Qualquer outra escolha do vetor v torna o par (A, Bv) controlável.

A condição de que a matriz A seja cíclica é essencial. Por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ (A, B) é controlável mas não existe v tal que (A, Bv) seja controlável.

Teorema: Se (A, B) é controlável, então para quase toda matriz constante $K \in \Re^{p\times n}$, a matriz $(A - BK)$ tem autovalores distintos e, conseqüentemente, é cíclica.

De maneira intuitiva, para $n = 4$, o polinômio característico de $A - BK$ é dado por

$$\Delta_f(s) = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4$$

com os coeficientes a_i funções dos elementos da matriz K. Diferenciando, tem-se

$$\Delta_f'(s) = 4s^3 + 3a_1 s^2 + 2a_2 s + a_3$$

Se $\Delta_f(s)$ tem raízes repetidas, então $\Delta_f(s)$ e $\Delta_f'(s)$ não são coprimas (há fatores comuns). A condição necessária e suficiente para que os polinômios não sejam coprimos é que a matriz de Sylvester associada seja singular.

$$\det \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 2a_2 & a_4 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 3a_1 & a_3 & 2a_2 & a_4 & a_3 & 0 & 0 \\ a_1 & 4 & a_2 & 3a_1 & a_3 & 2a_2 & a_4 & a_3 \\ 1 & 0 & a_1 & 4 & a_2 & 3a_1 & a_3 & 2a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_1 & 4 & a_2 & 3a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = f(k_{ij}) = 0$$

Entre todas as possíveis escolhas para k_{ij}, há pouca probabilidade de que $f(k_{ij}) = 0$.

• Alocação dos autovalores de $(A - BK)$

Se A não for cíclica, introduzir a realimentação $u = w - K_1 x$ tal que $\bar{A} = A - BK_1$ seja cíclica.

$$\dot{x} = (A - BK_1)x + Bw \triangleq \bar{A}x + Bw$$

Como (A, B) é controlável, $(\bar{A}, B)$ também o é. Assim, existe um vetor v tal que $(\bar{A}, Bv)$ é controlável.

Lei de controle: $w = r - K_2 x$, com $K_2 = vk$, $k \in \Re^{1\times n}$

$$\dot{x} = (\bar{A} - BK_2)x + Br = (\bar{A} - Bvk)x + Br$$

Combinando as duas realimentações de estado: $u = w - K_1 x$ e $w = r - K_2 x$

$$u = r - (K_1 + K_2)x \triangleq r - Kx$$

• Método da equação de Lyapunov

Dado o par (A, B), encontre $K \in \Re^{p\times n}$ tal que $(A - BK)$ tenha os autovalores alocados arbitrariamente (desde que não coincidentes com nenhum autovalor de A).

1) Escolha $F \in \Re^{n\times n}$ com os autovalores desejados (não contendo nenhum de A).

2) Escolha $\bar{K}$ tal que o par $(F, \bar{K})$ seja observável.

3) Obtenha a solução única de $AT - TF = B\bar{K}$.

Se T for singular, escolha um $\bar{K}$ diferente e repita o processo. Obtendo T não singular, $K = \bar{K}T^{-1}$ é o ganho que aloca os autovalores de $(A - BK)$ no local desejado.

Para T não singular, $KT = \bar{K}$ implica

$$(A - BK)T = TF \qquad \Longleftrightarrow \qquad A - BK = TFT^{-1}$$

Para sistemas SISO, T é sempre não singular se (A, B) é controlável e $(F, \bar{K})$ é observável (condições apenas necessárias para sistemas MIMO).

Teorema: Se A e F não têm autovalores coincidentes, então a solução única T de $AT - TF = B\bar{K}$ é não-singular somente se (A, B) é controlável e $(F, \bar{K})$ é observável.

Da prova do caso SISO, para $n = 4$, tem-se

$$-T\Delta(F) = \left[\begin{array}{cccc} B & AB & A^2B & A^3B \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} \alpha_3\mathbf{I} & \alpha_2\mathbf{I} & \alpha_1\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \alpha_2\mathbf{I} & \alpha_1\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \alpha_1\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \bar{K} \\ \bar{K}F \\ \bar{K}F^2 \\ \bar{K}F^3 \end{array}\right]$$

$$-T\Delta(F) = \mathfrak{C}\ \Sigma\ \mathfrak{O}$$

$\Delta(F)$ é não singular, $\mathfrak{C} \in \Re^{n \times np}$, $\Sigma \in \Re^{np \times np}$ e $\mathfrak{O} \in \Re^{np \times n}$.

Se $\mathfrak{C}$ ou $\mathfrak{O}$ tiverem rank menor do que n, então T é singular.

Estimadores de Estado: sistemas MIMO

Considere o sistema de ordem n com p entradas e q saídas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Estimador de ordem completa

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

Definindo o erro $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$ tem-se

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Se (A, C) é observável, então todos os autovalores de $(A - LC)$ podem ser arbitrariamente alocados através da escolha de L (determinando assim a taxa com que $\hat{x}$ se aproxima de x).

- L pode ser computado pelos mesmos métodos utilizados para o cálculo de K

Estimadores de Ordem Reduzida

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad y = Cx \qquad \rho(C) = q$$

Defina $P \triangleq \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$, com $R_{(n-q)\times n}$ tal que $\exists\ P^{-1}$.

$$Q \triangleq P^{-1} = \left[\, Q_1 \,\middle|\, Q_2 \,\right] \qquad Q_1\ n \times q \ \ ; \ \ Q_2\ n \times (n-q)$$

$$\mathbf{I}_n = PQ = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CQ_1 & CQ_2 \\ RQ_1 & RQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix}$$

Transformação de Equivalência

$$\dot{\bar{x}} = PAP^{-1}\bar{x} + PBu$$

$$y = CP^{-1}\bar{x} = CQ\bar{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & 0 \end{bmatrix} \bar{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & 0 \end{bmatrix} \bar{x} = \bar{x}_1 \qquad \bar{x}_1\ q \times 1 \quad ; \quad \bar{x}_2\ (n-q) \times 1$$

$\longrightarrow$ apenas $n-q$ elementos de $\bar{x}$ precisam ser estimados

$$\dot{y} = \bar{A}_{11}y + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + \bar{B}_1 u$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{A}_{21}y + \bar{B}_2 u$$

Definindo

$$\bar{u} \triangleq \bar{A}_{21}y + \bar{B}_2u \quad ; \quad w \triangleq \dot{y} - \bar{A}_{11}y - \bar{B}_1u$$

tem-se

$$\dot{\bar{x}}_2 = \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{u} \quad ; \quad w = \bar{A}_{12}\bar{x}_2$$

Teorema

O par (A, C) (ou o par $(\bar{A}, \bar{C})$) é observável se e somente se o par $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ é observável.

Portanto, existe um estimador para $\bar{x}_2$ na forma

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2 = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2 + \bar{L}w + \bar{u} =$$

$$= (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2 + \bar{L}(\dot{y} - \bar{A}_{11}y - \bar{B}_1u) + (\bar{A}_{21}y + \bar{B}_2u)$$

Definindo $z \triangleq \hat{\bar{x}}_2 - \bar{L}y$, tem-se

$$\dot{z} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})(z + \bar{L}y) + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11})y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)u$$

$$\dot{z} = (\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})z+[(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}+(\bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11})]y+(\bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1)u$$

$z + \bar{L}y$ é uma estimativa de $\bar{x}_2$

Defina o erro como

$$e = \bar{x}_2 - (z + \bar{L}y)$$

e portanto a equação dinâmica do erro é dada por:

$$\dot{e} = \dot{\bar{x}}_2 - (\dot{z} + \bar{L}\dot{y}) = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})e$$

Como o par $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ é observável, os autovalores de $\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12}$ podem ser arbitrariamente alocados.

O estado estimado é composto pela informação precisa obtida da saída y mais a estimativa $z + \bar{L}y$, isto é:

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \bar{L}y + z \end{bmatrix}$$

Nas coordenadas originais

$$\hat{x} = P^{-1}\hat{\bar{x}} = Q\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \bar{L}y + z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & 0 \\ \bar{L} & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

• Os autovalores de $\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12}$ podem ser alocados pela escolha de $\bar{L}$, usando-se os mesmos métodos utilizados para cálculo de realimentação de estados.

Estimador de ordem reduzida: procedimento alternativo

Considere um sistema de dimensão n e q saídas, com o par (A, C) observável e C de rank q.

1) Escolha $F \in \Re^{(n-q)\times(n-q)}$ estável arbitrária mas com autovalores diferentes daqueles de A.

2) Escolha $L \in \Re^{(n-q)\times q}$ tal que (F, L) seja controlável.

3) Obtenha $T \in \Re^{(n-q)\times n}$ solução única da equação de Lyapunov

$$TA - FT = LC$$

4) Se a matriz quadrada

$$P = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$$

for singular, retorne ao passo **2)** e repita o processo para outra matriz L. Se P for não singular, a equação de estado de ordem $n - q$

$$\dot{z} = Fz + TBu + Ly$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

produz um estimador para x.

• Da equação do estimador, tem-se $y = C\hat{x}$ (y portanto estima Cx) e $z = T\hat{x}$. Definindo $e = z - Tx$, tem-se

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{x} = Fz + TBu + LCx - TAx - TBu$$

$$= Fz + (LC - TA)x = F(z - Tx) = Fe$$

Se F é estável, $e(t) \to \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$ e portanto z é um estimador para Tx

Teorema: Se A e F não têm autovalores em comum, então a matriz quadrada

$$P = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$$

com T solução única de $TA - FT = LC$ é não singular somente se (A, C) é observável e (F, L) é controlável.

Condição apenas necessária. Dado um par (A, C) observável, é possível escolher (F, L) controlável e obter P singular, mas escolhendo outro L obtém-se P não singular.

Realimentação a partir dos Estados Estimados

Considere o sistema n dimensional

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

E o estimador de ordem $n - q$

$$\dot{z} = Fz + TBu + Ly$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Particionando a inversa de P na forma

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$$

com $Q_1 \in \Re^{n\times q}$ e $Q_2 \in \Re^{n\times(n-q)}$, isto é

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = Q_1C + Q_2T = \mathbf{I}$$

Com isso, pode-se re-escrever o estimador de ordem $n - q$

$$\dot{z} = Fz + TBu + Ly$$

$$\hat{x} = Q_1y + Q_2z$$

Se o estado do sistema não estiver disponível para realimentação, pode-se utilizar o estado estimado $\hat{x}$

$$u = r - K\hat{x} = r - KQ_1y - KQ_2z$$

Substituindo na equação do sistema e na do estimador, tem-se

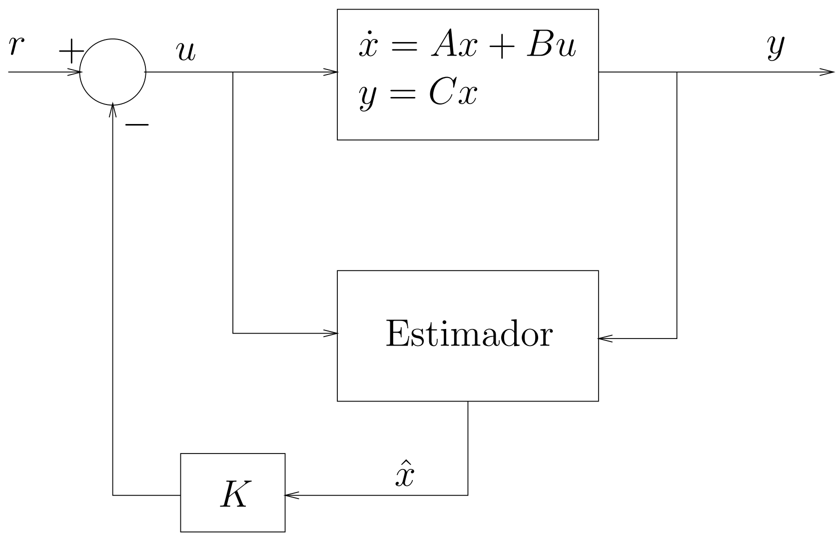
$$\dot{x} = Ax + B(r - KQ_1y - KQ_2z) =$$
$$= (A - BKQ_1C)x - BKQ_2z + Br$$

$$\dot{z} = Fz + TB(r - KQ_1y - KQ_2z) + LCx =$$
$$= (LC - TBKQ_1C)x + (F - TBKQ_2)z + TBr$$

Escrevendo de maneira combinada (sistema de dimensão $2n - q$)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BKQ_1C & -BKQ_2 \\ LC - TBKQ_1C & F - TBKQ_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ TB \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$



De maneira similar à do caso SISO, pode-se utilizar a transformação de equivalência

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z - Tx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ -T & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Manipulando e usando a equação $TA - FT = LC$ e as partições Q_1 e Q_2 da inversa de P, tem-se o sistema equivalente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BKQ_2 \\ \mathbf{0} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

- Vale também o princípio da separação.

Os autovalores de F não são afetados por r e a matriz de transferência de r para y é dada por

$$G_f(s) = C(s\mathbf{I} - A + BK)^{-1}B$$