Realimentação de Estado — Sistemas SISO

Considere o sistema n dimensional

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{aligned}$$

Na realimentação de estados, a entrada u é dada por

$$u = r - kx = r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} x$$

sendo r um sinal de referência. Substituindo

$$\dot{x} = (A - bk)x + br$$

$$y = cx$$

Teorema

O par $(A - bk, b)$ é controlável para qualquer vetor $k \in \mathbb{R}^{1\times n}$ se e somente se o par (A, b) também o for.

Prova: considere $n = 4$ e as matrizes de controlabilidade

$$\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{C}_f = \begin{bmatrix} b & (A - bk)b & (A - bk)^2b & (A - bk)^3b \end{bmatrix}$$

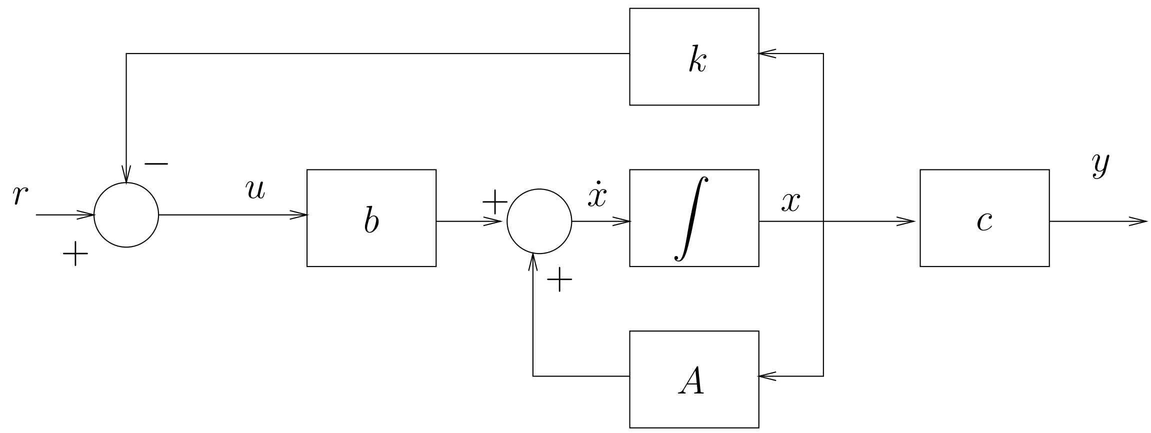
Note que

$$\mathfrak{C}_f = \mathfrak{C} \begin{bmatrix} 1 & -kb & -k(A - bk)b & -k(A - bk)^2b \\ 0 & 1 & -kb & -k(A - bk)b \\ 0 & 0 & 1 & -kb \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz à direita é não singular para qualquer k. Portanto, o rank de $\mathfrak{C}_f$ é igual ao de $\mathfrak{C}$.

O resultado do teorema anterior também pode ser demonstrado pela definição de controlabilidade. Considere x_0 e x_1 arbitrários. Se o sistema original é controlável, existe u_1 que leva de x_0 a x_1 em tempo finito. A entrada $r_1 = u_1 + kx$, leva o sistema controlado de x_0 a x_1.

Note também que r não controla o estado diretamente; r gera a entrada u que é usada para controlar x. Portanto, se u não controla o estado x, r também não controla.



- Controlabilidade: invariante sob qualquer realimentação de estados

- A observabilidade pode ser destruída por uma realimentação de estados

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

$\rightarrow$ Sistema controlável e observável.

Defina $u = r - \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

$$\mathfrak{C}_f = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ \text{rank} = 2 \quad ; \quad \mathfrak{O}_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \ \text{rank} = 1$$

$\rightarrow$ Sistema controlável e não observável.

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Polinômio característico: $\Delta(s) = (s-4)(s+2)$

Realimentação de estados: $u = r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} x$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1-k_1 & 3-k_2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Polinômio característico: $\Delta_f(s) = s^2 + (k_1 - 2)s + (3k_2 - k_1 - 8)$

- A escolha de k_1 e k_2 pode alocar os autovalores do sistema em malha fechada em qualquer posição arbitrária.

Teorema

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu\\ y &= cx\end{aligned}$$

com $n = 4$ e o polinômio característico

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - A) = s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4$$

Se o sistema é controlável, então existe uma transformação $\bar{x} = Px$ com

$$Q = P^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} b & Ab & A^2b & A^3b \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que leva o sistema à forma canônica controlável

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \bar{c}\bar{x} = \left[\begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array}\right] \bar{x}$$

Além disso, a função de transferência do sistema é dada por

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2^2 + \alpha_3 s + \alpha_4}$$

Prova: Sejam $\mathfrak{C}$ e $\bar{\mathfrak{C}}$ as matrizes de controlabilidade do sistema original e do transformado, respectivamente. No caso SISO, ambas são quadradas. Se o sistema original é controlável ou $\mathfrak{C}$ é não singular, $\bar{\mathfrak{C}}$ também o é, e as duas matrizes se relacionam na forma $\bar{\mathfrak{C}} = P\mathfrak{C}$. Assim,

$$P = \bar{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}^{-1} \quad \text{ou} \quad Q = P^{-1} = \mathfrak{C}\bar{\mathfrak{C}}^{-1}$$

A matriz de controlabilidade do sistema transformado é dada por

$$\bar{\mathfrak{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 - \alpha_2 & -\alpha_1^3 + 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 - \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é dada por

$$\bar{\mathfrak{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e substituindo-se em $Q = \mathfrak{C}\bar{\mathfrak{C}}^{-1}$ obtém-se o resultado do teorema.

É fácil verificar que a equação de estado transformada é uma realização da função de transferência $G(s)$, que por sua vez é também a função de transferência do sistema original.

Teorema

Se o sistema

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx$$

é controlável, então com a realimentação de estados $u = r - kx$ pode-se alocar arbitrariamente os autovalores de $A - bk$ (desde que autovalores complexos apareçam em pares complexo conjugados).

Prova: Considerando $n = 4$, se o sistema é controlável, então pode ser colocado na forma canônica

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \bar{c}\bar{x} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} \bar{x}$$

com $\bar{A} = PAP^{-1}$ e $\bar{b} = Pb$. Substituindo $\bar{x} = Px$ na lei de controle, tem-se

$$u = r - kx = r - kP^{-1}\bar{x} \triangleq r - \bar{k}\bar{x}$$

com $\bar{k} \triangleq kP^{-1}$. Como $\bar{A} - \bar{b}\bar{k} = P(A - bk)P^{-1}$, as matrizes $(A - bk)$ e $(\bar{A} - \bar{b}\bar{k})$ têm os mesmos autovalores.

Especificados os autovalores do sistema em malha fechada, pode-se formar o polinômio característico do sistema em malha fechada

$$\Delta_f(s) = s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4$$

Se $\bar{k}$ é escolhido

$$\bar{k} = \left[\; \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 \;\; \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 \;\; \bar{\alpha}_3 - \alpha_3 \;\; \bar{\alpha}_4 - \alpha_4 \; \right]$$

a equação dinâmica em malha fechada fica

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A} - \bar{b}\bar{k})\bar{x} + \bar{b}r = \begin{bmatrix} -\bar{\alpha}_1 & -\bar{\alpha}_2 & -\bar{\alpha}_3 & -\bar{\alpha}_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

e o polinômio característico de $(A - bk)$ e $(\bar{A} - \bar{b}\bar{k})$ é dado por $\Delta_f(s)$.

O ganho de realimentação de estados k que faz a alocação desejada pode ser computado

$$k = \bar{k}P = \bar{k}\bar{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}^{-1}$$

sendo $\mathfrak{C} = \left[\; b \;\; Ab \;\; A^2b \;\; A^3b \; \right]$ e

$$\bar{\mathfrak{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Outra maneira de computar $\bar{k}$

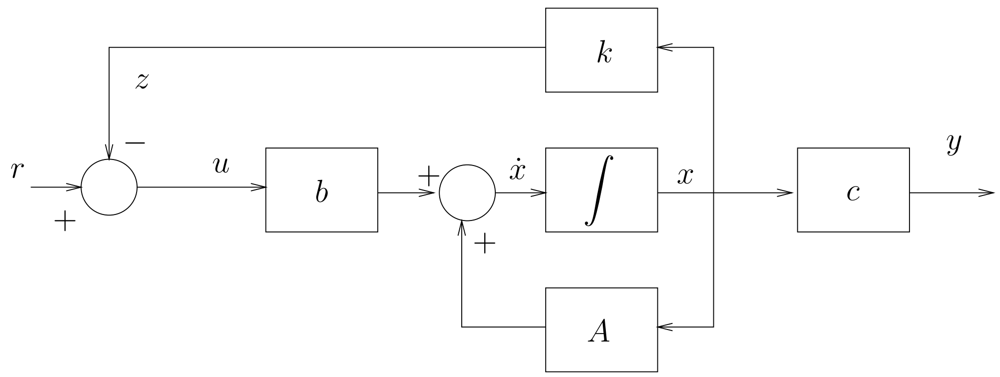
$$\Delta_f(s) = \det(s\mathbf{I} - A + bk) = \det\left((s\mathbf{I} - A)[\mathbf{I} + (s\mathbf{I} - A)^{-1}bk]\right)$$

$$= \det(s\mathbf{I} - A)\det[\mathbf{I} + (s\mathbf{I} - A)^{-1}bk] = \Delta(s)[1 + k(s\mathbf{I} - A)^{-1}b]$$

Assim,

$$\Delta_f(s) - \Delta(s) = \Delta(s)k(s\mathbf{I} - A)^{-1}b = \Delta(s)\bar{k}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{b}$$

Seja $\bar{k} = \left[\ \bar{k}_1 \ \ \bar{k}_2 \ \ \bar{k}_3 \ \ \bar{k}_4\ \right]$



Função de transferência de u para y:

$$\bar{c}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{b} = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{\Delta(s)}$$

Função de transferência de u para z:

$$\bar{k}(s\mathbf{I} - \bar{A})^{-1}\bar{b} = \frac{\bar{k}_1 s^3 + \bar{k}_2 s^2 + \bar{k}_3 s + \bar{k}_4}{\Delta(s)}$$

Portanto

$$(\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)s^3 + (\bar{\alpha}_2 - \alpha_2)s^2 + (\bar{\alpha}_3 - \alpha_3)s + (\bar{\alpha}_4 - \alpha_4) = \bar{k}_1 s^3 + \bar{k}_2 s^2 + \bar{k}_3 s + \bar{k}_4$$

Função de Transferência ($n = 4$):

$$G(s) = c(s\mathbf{I} - A)^{-1}b = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4}$$

Função de Transferência em Malha Fechada (com $u = r - kx$):

$$G_f(s) = c(s\mathbf{I} - A + bk)^{-1}b = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4}$$

A realimentação de estados pode alterar a localização dos pólos, mas não afeta os zeros da função de transferência.

Pode afetar a observabilidade: se um ou mais pólos são deslocados de maneira a coincidir com zeros, pode haver cancelamento.

Exemplo: Considere o pêndulo invertido linearizado:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

O sistema é controlável; o polinômio característico é (por inspeção):

$$\Delta(s) = s^2(s^2 - 5) = s^4 + 0s^3 - 5s^2 + 0s + 0$$

Colocando o sistema na forma canônica controlável ($P^{-1} = \mathfrak{C}\bar{\mathfrak{C}}^{-1}$)

$$\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{\mathfrak{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & -1/6 \\ -1/3 & 0 & -1/6 & 0 \end{bmatrix}$$

Alocação desejada: $-1.5 \pm 0.5j$ e $-1 \pm j$

$$\Delta_f(s) = (s + 1.5 - 0.5j)(s + 1.5 + 0.5j)(s + 1 - j)(s + 1 + j) =$$

$$= s^4 + 5s^3 + 10.5s^2 + 11s + 5$$

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} (5-0) & (10.5+5) & (11-0) & (5-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15.5 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$k = \bar{k}P = \begin{bmatrix} -5/3 & -11/3 & -103/12 & -13/3 \end{bmatrix}$$

- Matlab: `k=place(A,b,p)`

Fórmula de Ackermann (para alocação de pólos)

Considere o sistema n dimensional

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{aligned}$$

Para $n = 4$, $\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix}$ é a matriz de controlabilidade e o sistema transformado $\bar{x} = Px$ com

$$Q = P^{-1} = \mathfrak{C} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

possui a forma canônica controlável

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix} \bar{x}$$

A relação entre a matriz de controlabilidade do sistema original e a do transformado é dada por $\bar{\mathfrak{C}} = P\mathfrak{C}$, ou $Q = P^{-1} = \mathfrak{C}\bar{\mathfrak{C}}^{-1}$ e

$$\bar{\mathfrak{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 - \alpha_2 & -\alpha_1^3 + 2\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3 \\ 0 & 1 & -\alpha_1 & \alpha_1^2 - \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No caso geral, a última linha da matriz $\bar{\mathfrak{C}}$ tem a forma

$$e'_n \triangleq \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Para a alocação desejada, define-se o polinômio característico do sistema em malha fechada

$$\Delta_f(s) = s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4$$

que deve ser igualado com

$$\det(s\mathbf{I} - \bar{A} + \bar{b}\bar{k}) = s^4 + (\alpha_1 + \bar{k}_1)s^3 + (\alpha_2 + \bar{k}_2)s^2 + (\alpha_3 + \bar{k}_3)s + (\alpha_4 + \bar{k}_4)$$

impondo

$$\bar{k} = \left[\begin{array}{cccc} \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 & \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 & \bar{\alpha}_3 - \alpha_3 & \bar{\alpha}_4 - \alpha_4 \end{array}\right]$$

• Teorema de Cayley-Hamilton: toda matriz dinâmica satisfaz sua equação característica:

$$\bar{A}^n + \alpha_1 \bar{A}^{n-1} + \alpha_2 \bar{A}^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\bar{A} + \alpha_n \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Utilizando os coeficientes do polinômio de malha fechada, pode-se formar o polinômio

$$\Delta_f(\bar{A}) \triangleq \bar{A}^n + \bar{\alpha}_1 \bar{A}^{n-1} + \bar{\alpha}_2 \bar{A}^{n-2} + \cdots + \bar{\alpha}_n \mathbf{I}$$

Substituindo-se $\bar{A}^n$ obtido a partir da equação característica, tem-se

$$\Delta_f(\bar{A}) = (\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)\bar{A}^{n-1} + (\bar{\alpha}_2 - \alpha_2)\bar{A}^{n-2} + \cdots + (\bar{\alpha}_n - \alpha_n)\mathbf{I}$$

Levando em conta a estrutura particular de $\bar{A}$, observa-se que

$$e_n'\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \triangleq e_{n-1}'$$

e conseqüentemente

$$(e_n'\bar{A})\bar{A} = e_n'\bar{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{A} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq e_{n-2}'$$

implicando

$$e_n'\bar{A}^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq e_1'$$

Portanto, multiplicando $\Delta_f(\bar{A})$ por e_n', tem-se

$$e_n'\Delta_f(\bar{A}) = (\bar{\alpha}_1 - \alpha_1)e_1' + (\bar{\alpha}_2 - \alpha_2)e_2' + \cdots + (\bar{\alpha}_n - \alpha_n)e_n' =$$

$$= \bar{k}_1 e_1' + \bar{k}_2 e_2' + \cdots + \bar{k}_n e_n' = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \cdots & \bar{k}_n \end{bmatrix} = \bar{k}$$

Como $k = \bar{k}P$ e $P = \bar{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}^{-1}$, tem-se

$$k = e_n'\Delta_f(\bar{A})P = e_n'\Delta_f(PAP^{-1})P = e_n'P\Delta_f(A) = e_n'\bar{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}^{-1}\Delta_f(A)$$

ou, como $e_n'\bar{\mathfrak{C}} = e_n'$, chega-se a

$$k = e_n'\mathfrak{C}^{-1}\Delta_f(A) \qquad \textbf{Fórmula de Ackermann}$$

• Para evitar o cômputo da inversa e obter diretamente $e_n'\mathfrak{C}^{-1} \triangleq q'$, resolve-se o sistema de equações $q'\mathfrak{C} = e_n'$ para q e depois determina-se $k = q'\Delta_f(A)$.

• No Matlab: `k=acker(A,b,p)`

Método alternativo (equação de Lyapunov)

Considere o par (A, b) controlável, com $A \in \Re^{n\times n}$ e $b \in \Re^{n\times 1}$. Encontre k tal que $(A - bk)$ tenha os autovalores desejados (desde que não coincidam com nenhum dos autovalores de A).

1) Escolha uma matriz $F \in \Re^{n\times n}$ com os autovalores desejados.

2) Escolha $\bar{k}$ arbitrário tal que $(F, \bar{k})$ seja observável.

3) Obtenha a solução única T da equação de Lyapunov

$$AT - TF = b\bar{k}$$

4) $k = \bar{k}T^{-1}$

Se T é não singular, $\bar{k} = kT$ e $AT - TF = b\bar{k}$ implicam

$$(A - bk)T = TF \quad \Longleftrightarrow \quad (A - bk) = TFT^{-1}$$

• $(A - bk)$ e F são similares (mesmos autovalores). Se A e F não têm autovalores comuns, existe uma única solução T para qualquer $\bar{k}$. Caso A e F tenham algum autovalor comum, a solução T pode existir ou não (depende de $b\bar{k}$).

• Para garantir que T é não singular:

Teorema: Se A e F não têm autovalores em comum, então a única solução de $AT - TF = b\bar{k}$ é não-singular se e somente se (A, b) é controlável e $(F, \bar{k})$ é observável.

Prova: Considere $n = 4$ e o polinômio característico de A dado por

$$\Delta(s) = s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4$$

Cayley-Hamilton: $\Delta(A) = A^4 + \alpha_1 A^3 + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A + \alpha_4 \mathbf{I} = \mathbf{0}$

Considere agora $\Delta(F) = F^4 + \alpha_1 F^3 + \alpha_2 F^2 + \alpha_3 F + \alpha_4 \mathbf{I}$.

Se $\bar{\lambda}_i$ é um autovalor de F, então $\Delta(\bar{\lambda}_i)$ é autovalor de $\Delta(F)$. Como A e F não têm autovalores em comum, $\Delta(\bar{\lambda}_i) \neq 0$ para todo autovalor de F.

Como o determinante de uma matriz é igual ao produto de seus autovalores, tem-se

$$\det \Delta(F) = \prod_i \Delta(\bar{\lambda}_i) \neq 0$$

e portanto $\Delta(F)$ é não singular.

Substituindo $AT = TF + b\bar{k}$ em $A^2T - TF^2$, tem-se

$$\begin{aligned} A^2T - TF^2 = A(TF + b\bar{k}) - TF^2 &= Ab\bar{k} + (AT - TF)F \\ &= Ab\bar{k} + b\bar{k}F \end{aligned}$$

De maneira similar, obtém-se o conjunto de equações:

$$\begin{aligned} IT - TI &= \mathbf{0} \\ AT - TF &= b\bar{k} \\ A^2T - TF^2 &= Ab\bar{k} + b\bar{k}F \\ A^3T - TF^3 &= A^2b\bar{k} + Ab\bar{k}F + b\bar{k}F \\ A^4T - TF^4 &= A^3b\bar{k} + A^2b\bar{k}F + Ab\bar{k}F + b\bar{k}F \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por α_4, a segunda por α_3, a terceira por α_2, a quarta por α_1, a última por 1, e somando todas, tem-se (lembrando que $\Delta(A) = \mathbf{0}$)

$$\Delta(A)T - T\Delta(F) = -T\Delta(F)$$

$$= \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k} \\ \bar{k}F \\ \bar{k}F^2 \\ \bar{k}F^3 \end{bmatrix}$$

Se (A, b) é controlável e $(F, \bar{k})$ é observável, as matrizes acima são não-singulares, e como $\Delta(F) \neq \mathbf{0}$, necessariamente T é não singular.

Escolha de F e $\bar{k}$

- F companheira e $\bar{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- F modal e $\bar{k}$ com ao menos um elemento diferente de zero associado a cada bloco diagonal.

Exemplo: pêndulo invertido e alocação $-1.5 \pm 0.5j$ e $-1 \pm j$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matlab: $k = \begin{bmatrix} -1.6667 & -3.6667 & -8.5833 & -4.3333 \end{bmatrix}$

O ganho é único em sistemas SISO.

- Cálculo direto dos valores do ganho k

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Alocação desejada: $-1.5 \pm 0.5j$ e $-1 \pm j$

$$\Delta_f(s) = (s + 1.5 - 0.5j)(s + 1.5 + 0.5j)(s + 1 - j)(s + 1 + j) =$$

$$= s^4 + 5s^3 + 10.5s^2 + 11s + 5$$

$$A - bk = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 - 1 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2k_1 & 2k_2 & 5 + 2k_3 & 2k_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$\det[s\mathbf{I} - (A - bk)] = s^4 + (k_2 - 2k_4)s^3 + (k_1 - 2k_3 - 5)s^2 - 3k_2 s - 3k_1$$

Portanto,

$$k_1 = \frac{-5}{3} \quad ; \quad k_2 = \frac{-11}{3} \quad ; \quad k_3 = \frac{-103}{12} \quad ; \quad k_4 = \frac{-13}{3}$$

Estabilização

Considere um sistema não controlável (nem todos os autovalores podem ser arbitrariamente alocados). A equação de estado pode ser transformada em

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u$$

com $(\bar{A}_c, \bar{b}_c)$ controlável. Como a matriz $\bar{A}$ é bloco diagonal, os autovalores de A são os autovalores das matrizes $\bar{A}_c$ e $\bar{A}_{\bar{c}}$.

A realimentação de estado

$$u = r - \bar{k}\bar{x} = r - \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

produz o sistema em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{b}_c\bar{k}_1 & \bar{A}_{12} - \bar{b}_c\bar{k}_2 \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r$$

Autovalores de $\bar{A}_{\bar{c}}$ não são afetados pela realimentação de estado. A controlabilidade do par (A, b) é não só suficiente mas também necessária para se alocar todos os autovalores de $(A - bk)$.

Se $\bar{A}_{\bar{c}}$ é estável, o sistema é **estabilizável**.

Regulação e Rastreamento

• Para $r = 0$, o comportamento dinâmico do sistema é governado pelas condições iniciais. O problema do regulador é obter uma realimentação de estados que leve a resposta para zero com uma certa taxa de decaimento.

$$y(t) = c\exp[(A - bk)t]x(0)$$

• Para $r = a$ (constante), o problema do rastreamento assintótico consiste na determinação de um ganho de realimentação de estados que leve $y(t) \to r(t)$ quando $t \to \infty$.

A lei de controle para o rastreamento deve incluir um ganho p *feed-forward*:

$$u(t) = pr(t) - kx$$

Para $n = 4$: $G_f(s) = p\dfrac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4}$

(A, b) controlável implica que os autovalores de $(A - bk)$ ou equivalentemente os pólos de $G_f(s)$ podem ser arbitrariamente alocados. Para $r(t) = a$, alocando pólos com parte real negativa, tem-se

$$y(t) \to G_f(0)a \quad \text{quando} \quad t \to \infty$$

$$G_f(0) = 1 = p\frac{\beta_4}{\bar{\alpha}_4} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{\bar{\alpha}_4}{\beta_4}$$

$\Longrightarrow \quad \beta_4 \neq 0$, o que ocorre se e somente se $G(s)$ não tiver nenhum zero em $s = 0$.

• Para $r(t)$ qualquer, tem-se o problema do servomecanismo.