1) (1.0)	
2) (1.0)	
3) (1.0)	
4) (1.0)	
5) (1.0)	
6) (1.0)	
7) (1.0)	
8) (1.0)	
9) (1.0)	
10) (1.0)	

P1) ____________

Nome: ....

RA: ....

1ª Questão: Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 5}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Qual o rank de A?

b) Qual a dimensão do espaço nulo de A?

c) Obtenha uma base para $\mathcal{R}(A)$ (range de A)

d) Obtenha uma base para $\mathcal{N}(A)$ (espaço nulo de A)

2ª Questão: Determine um sistema de equações $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

que admita como solução geral

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \forall\ \alpha, \beta$$

3ª Questão: Considere a base B para o espaço $\mathcal{P}_3$ dos polinômios de grau menor ou igual a 3 formada pelos vetores $\{1, t-1, t^2-1, t^3-1\}$.

a) Encontre a representação β do vetor $p(t) = 5t^2 - 3t + 1$ na base B.

b) Encontre a representação $\bar{\beta}$ do vetor $p(t) = 5t^2 - 3t + 1$ na base $\bar{B} = \{t^3, t^2, t, 1\}$.

c) Encontre a representação $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, na base B, da transformação linear que leva um polinômio pertencente ao espaço $\mathcal{P}_3$ para outro polinômio do mesmo espaço, igual à derivada do primeiro.

4ª Questão: Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Encontre a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

b) Encontre Q tal que $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

5ª Questão: Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine α_0 e α_1 tais que $g(A) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 A = A^{33}$ e compute A^{33}

6ª Questão: A forma de Jordan de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ é dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine o polinômio característico de A

b) Determine o polinômio mínimo de A

c) Quantos autovetores linearmente independentes v (isto é, v tal que $Av = \lambda v$, $v \neq 0$) possui a matriz A?

7ª Questão: O polinômio característico de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ é dado por $\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. Obtenha uma representação para A^{-1} em termos da base $\{\mathbf{I}, A, A^2\}$

8ª Questão: Determine os valores de α e β para que a forma quadrática $f(x_1, x_2) = 10x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + \beta x_2^2$ seja definida positiva, ou seja,

$$f(x_1, x_2) > 0 \ , \forall x_1, x_2 \ , \ x_1 \neq 0, \ x_2 \neq 0$$

9ª Questão: Mostre que matrizes simétricas possuem autovalores reais.

10ª Questão: Mostre que a equação característica de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ é dada por

$$\lambda^2 - \mathbf{Tr}\ (A)\lambda + \det(A) = 0$$

sendo $\mathbf{Tr}(A)$ o traço (soma dos elementos da diagonal) de A e $\det(A)$ o determinante de A.