Matrizes e vetores

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$\leadsto$ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$: matriz real (elementos são escalares reais), $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$: matriz complexa;

$\leadsto$ $x \in \mathbb{R}^n$ (real), $x \in \mathbb{C}^n$ (complexo)

- Transposição:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \; x' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}; \; (A+B)' = A' + B'; \; (AB)' = B'A'$$

- Matriz conjugada $\bar{A}$ $(A \in \mathbb{C}^{m \times n})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+j & 0 \\ -3-3j & j & -1-5j \\ 0 & 4j & 1+j \end{bmatrix} \; ; \; \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1-j & 0 \\ -3+3j & -j & -1+5j \\ 0 & -4j & 1-j \end{bmatrix}$$

- Matriz conjugada transposta $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -3+3j & 0 \\ 1-j & -j & -4j \\ 0 & -1+5j & 1-j \end{bmatrix}$

$$(A+B)^* = A^* + B^* \quad ; \quad (AB)^* = B^* A^* \quad ; \quad c \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; (cA)^* = \bar{c} A^*$$

Traço: soma dos elementos da diagonal de uma matriz quadrada

$$A_{n \times n} \implies \mathrm{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \;\; ; \;\; \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \;\; ; \;\; \mathrm{Tr}(\alpha A + B) = \alpha \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$$

Matrizes

- Simétrica: $A = A'$ $(a_{ij} = a_{ji})$
- Anti-simétrica: $A = -A'$ $(a_{ij} = -a_{ji})$

Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, então $A + A'$ é simétrica ; $A - A'$ é anti-simétrica

Se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, então $A'A$ é simétrica ; AA' é simétrica

- Hermitiana: $A = A^*$ $(a_{ij} = \bar{a}_{ji})$
- Anti-hermitiana: $A^* = -A$

Toda matriz quadrada A pode ser expressa de maneira única como

$$A = X + jY \ \ ; \ \ X = \frac{1}{2}(A + A^*) \ \ ; \ \ Y = \frac{1}{2j}(A - A^*) \ \ ; \ \ X, Y \text{ hermitianas}$$

Determinantes

- Notação: $\det(A)$ é o **determinante** da matriz quadrada $A_{n\times n}$, função escalar que pode ser calculada a partir de uma linha arbitrária k da matriz

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}C_{kj}$$

ou ainda a partir de uma coluna l qualquer

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{il}C_{il}$$

sendo C_{pq} os **cofatores** dados por

$$C_{pq} = (-1)^{p+q}M_{pq}$$

e M_{pq} os **menores** associados aos elementos a_{pq} da matriz $A_{n\times n}$. O **menor** M_{pq} é o determinante da matriz de dimensão $(n-1)\times(n-1)$ obtida a partir da eliminação da linha p e da coluna q da matriz A.

$\rightsquigarrow$ Determinantes de $A_{n\times n}$, para $n = 1,2$ e 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det(A) = a_{11}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \end{array}$$

Propriedades dos Determinantes

- Se duas linhas (colunas) são trocadas, troca-se o sinal

- Não se altera se uma linha (coluna) multiplicada por um escalar é somada a outra linha (coluna)

- Se uma matriz tem duas linhas (colunas) idênticas o determinante é igual a zero

- $\det(A') = \det(A) \quad ; \quad \det(A^*) = \det(\bar{A})$

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) \ (A \in \mathbb{R}^{n\times n})$

- $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(A)\det(D)$

Matrizes

- Ortogonal: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A'A = AA' = \mathbf{I}$ • Unitária: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A^*A = AA^* = \mathbf{I}$

- Determinante de matriz hermitiana é sempre real: $\det(A) = \det(A^*) = \det(\overline{A}') = \det(\overline{A})$

- Se $\det(A) = 0$ a matriz A é chamada singular

Inversa de uma matriz: $A_{n\times n}$ possui uma inversa $B_{n\times n} = A^{-1}$ se

$$AB = BA = \mathrm{I}_{n\times n}$$

A inversa de uma matriz é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{Adj }(A)$$

sendo Adj (A) a matriz **adjunta** da matriz A, definida como

$$\text{Adj }(A) = [\text{Co }(A)]'$$

e Co (A) é a matriz **cofatora** de A, composta pelos cofatores C_{ij} da matriz A.

$\rightsquigarrow$ Uma identidade matricial $AB = C$ pode ser particionada de várias maneiras:

$$\left[\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 & A_1B_2 \\ \hline A_2B_1 & A_2B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_1B_1 + A_2B_2 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} C_1 \\ \hline C_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array}\right]$$

$\rightsquigarrow$ inversa de matriz ortogonal é igual à transposta $A^{-1} = A'$

$\rightsquigarrow$ inversa de matriz unitária é igual à conjugada transposta $A^{-1} = A^*$

- Inversa de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Fórmulas para Matrizes Inversas

Considere a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ com A_{11} e A_{22} também quadradas.

- Se A_{11} é não-singular: $\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ A_{21}A_{11}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & A_{11}^{-1}A_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$\Delta \triangleq A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$; A é não-singular sse Δ é não-singular

- Se A_{22} é não-singular: $\det(A) = \det(A_{22})\det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & A_{12}A_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Delta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ A_{22}^{-1}A_{21} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$\hat{\Delta} \triangleq A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$; A é não-singular sse $\hat{\Delta}$ é não singular

Δ ($\hat{\Delta}$) é chamado de complemento de Schur de A_{11} (A_{22})

- Se A é não singular

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} \Delta^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} \Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}^{-1} & -\hat{\Delta}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} \hat{\Delta}^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} \hat{\Delta}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

⇝ Fórmulas para Matrizes Inversas

$$(A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21})^{-1} A_{12} A_{22}^{-1}$$

- Para A bloco-triangular

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ \mathbf{0} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

- Para matrizes quaisquer $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ e $C \in \mathbb{C}^{n\times m}$

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & B \\ -C & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = \det(\mathbf{I}_n + CB) = \det(\mathbf{I}_m + BC)$$

- Para quaisquer $x, y \in \mathbb{C}^n$: $\det(\mathbf{I}_n + xy^*) = 1 + y^*x$

Sistema de Equações Lineares

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Forma matricial: $y = Ax$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Interpretação: y é a medida ou valor observado e x é a incógnita; ou y é a saída (resultado) e x é a entrada (ação); $y = Ax$ define um mapeamento (função ou transformação) que leva $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^m$

Equação Característica

- Considere a equação linear $\lambda x = Ax$, com λ escalar, que pode ser escrita: $(\lambda\mathbf{I} - A)x = 0$

$\rightsquigarrow$ Uma solução $x \neq 0$ existe se e somente se $\det(\lambda\mathbf{I} - A) = 0$

$\rightsquigarrow$ Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a expansão fornece uma equação polinomial de ordem n, com n raízes características λ_i, $i = 1,\ldots,n$ chamadas de autovalores da matriz A.

$$\lambda_i x_i = A x_i \quad ; \quad i = 1,\ldots,n$$

x_i: vetor característico (autovetor) associado à raiz característica (autovalor) λ_i

Polinômio Característico: $\det(\lambda\mathbf{I} - A)$ (mônico, de grau n)

Equação Característica: $\det(\lambda\mathbf{I} - A) = 0$

Obs.: $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \implies \lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{C}^n$

Polinômios Coprimos

⇝ São polinômios que não possuem fator comum. Dados dois polinômios p_0 e p_1, com o grau de p_1 menor ou igual ao grau de p_0, pode-se usar o **algoritmo euclidiano** para determinar se p_0 e p_1 possuem ou não um fator comum.

- Determine os polinômios $p_2, \ldots, p_k$ tais que p_{i+1} seja o resto da divisão de p_{i-1} por p_i.

- Dessa forma, garante-se que os polinômios p_i possuem grau estritamente decrescente e que existem polinômios q_i, $i = 1, \ldots, k$ tais que $p_{i-1} = q_i p_i + p_{i+1}$.

- A seqüência termina quando encontra-se um p_k que divide p_{k-1}, ou, se p_0 e p_1 não possuem fator comum, a seqüência termina com p_k igual a uma constante não nula. Se houver um fator comum, o maior denominador comum entre p_0 e p_1 é dado pelo p_k que divide p_{k-1}.

Exemplo: Considere $p_0 = s^3 - 6s^2 + 11s - 6$ e $p_1 = s^2 - 5s + 4$.

$$p_0 = \underbrace{(s-1)}_{q_1} p_1 + \underbrace{(2s-2)}_{p_2}$$
$$p_1 = \underbrace{(0.5s-2)}_{q_2} p_2 + \underbrace{0}_{p_3}$$

$p_2 = 2(s-1)$ é o maior denominador comum

Exemplo: $p_0 = s^3 + 4s^2 - 2s + 1$ e $p_1 = s^2 + 2s - 1$.

$$p_0 = (s+2)p_1 + (-5s+3)$$
$$p_1 = (-0.2s - 0.52)p_2 + 0.56$$

$\Longrightarrow$ não possuem fator comum

Polinômios Coprimos

A **matriz de Sylvester** pode ser usada para se determinar se dois polinômios são ou não coprimos.

Considere, por exemplo, os polinômios

$$\begin{aligned} p(s) &= p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3 \\ q(s) &= q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3 \end{aligned}$$

A existência de um fator comum implica que existem polinômios

$$a(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 \quad ; \quad b(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2$$

tais que

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{a(s)}{b(s)} \quad \Longrightarrow \quad p(s)b(s) + q(s)(-a(s)) = 0$$

$\rightsquigarrow$ Agrupando as incógnitas (coeficientes de $a(s)$ e $b(s)$) em um vetor, por exemplo, na seguinte ordem

$$x = \begin{bmatrix} -a_0 & b_0 & -a_1 & b_1 & -a_2 & b_2 \end{bmatrix}'$$

e, correspondentemente, os coeficientes de $p(s)$ e $q(s)$ em uma matriz, tem-se

$$Sx \triangleq \begin{bmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & p_1 & q_0 & p_0 & 0 & 0 \\ q_2 & p_2 & q_1 & p_1 & q_0 & p_0 \\ q_3 & p_3 & q_2 & p_2 & q_1 & p_1 \\ 0 & 0 & q_3 & p_3 & q_2 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 & p_3 \end{bmatrix} x = 0$$

que possui solução diferente da trivial se e somente se $\det(S) = 0$.

S é conhecida como a matriz de Sylvester associada aos polinômios $p(s)$ e $q(s)$, e pode ser construída de diversas maneiras equivalentes, dependendo do empilhamento escolhido para o vetor x.

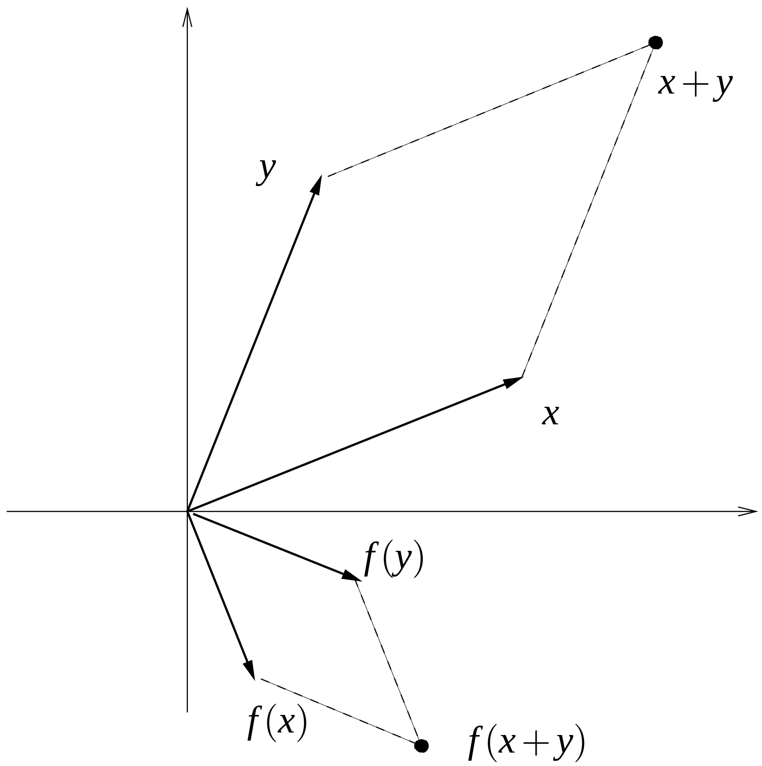
$\rightsquigarrow$ Os polinômios são coprimos se e somente $\det(S) \neq 0$.

Função Linear

Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é linear se

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

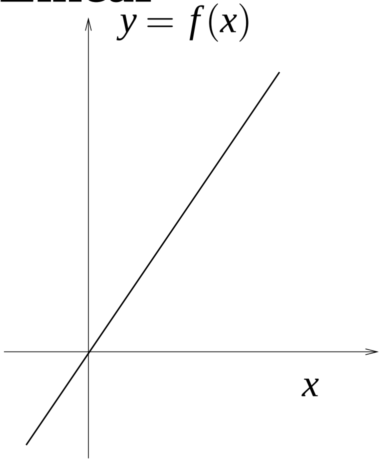
Isto é, vale o **princípio da superposição**



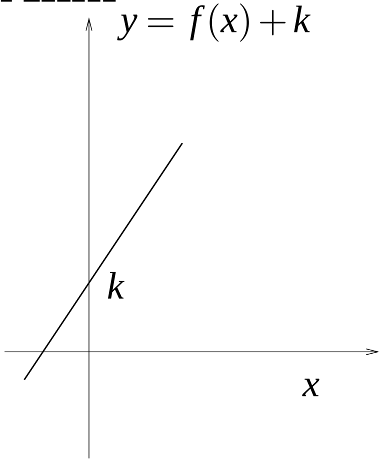
Exemplo: $f(x) = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Qualquer função linear $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ pode ser escrita na forma $f(x) = Ax$

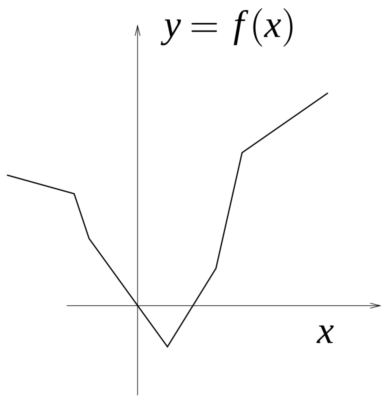
Função Linear



Função Afim



Função Linear por partes



Interpretação

$$y = Ax \quad \Rightarrow \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \;\; ; \quad i = 1 \cdots m$$

- a_{ij}: fator de ganho da j-ésima entrada x_j para a i-ésima saída y_i

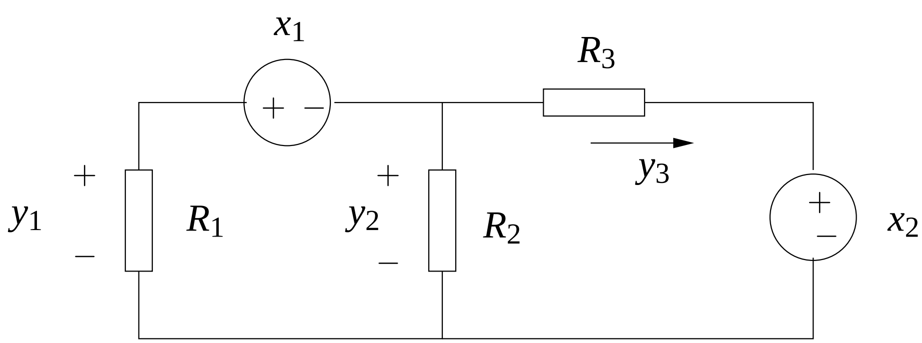
i-ésima linha de A se relaciona com a i-ésima saída

j-ésima coluna de A se relaciona com a j-ésima entrada

$a_{23} = 0$ implica que a segunda saída y_2 não depende da terceira entrada x_3

$\rightsquigarrow$ Por exemplo, A diagonal (isto é $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$) implica que a i-ésima saída depende apenas da i-ésima entrada

Exemplo: circuito linear estático (contendo apenas resistores, fontes independentes e fontes dependentes). Denominando x_j as tensões das fontes independentes e y_i as variáveis (tensão ou corrente) do circuito, tem-se



$$\frac{y_1}{R_1} + \frac{y_2}{R_2} + y_3 = 0$$

$$y_1 = x_1 + y_2 \quad ; \quad y_2 = R_3 y_3 + x_2$$

$$\begin{bmatrix} 1/R_1 & 1/R_2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \begin{bmatrix} R_1(R_2+R_3) & R_1R_2 \\ -R_2R_3 & R_1R_2 \\ -R_2 & -(R_1+R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Auxílio de ferramentas de computação simbólica

Linearização

- Funções não-lineares $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciáveis em $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Para x próximo de x_0, $f(x)$ é muito próximo de $f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$

Matriz jacobiano: $Df(x_0)_{ij} = \left.\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_0}$

Se $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, define-se $\delta x \triangleq x - x_0$ (variação da entrada) e $\delta y \triangleq y - y_0$ (variação da saída), e portanto

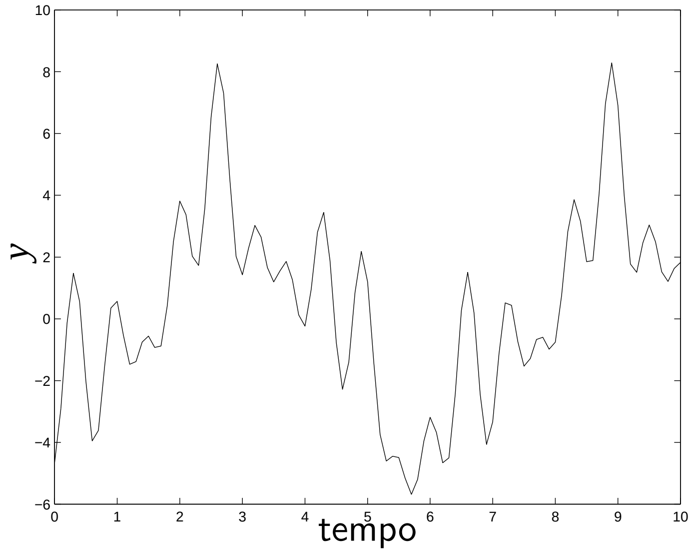
$$\delta y \approx Df(x_0)\delta x$$

- Para pequenas variações em torno de x_0, o comportamento é aproximadamente **linear**

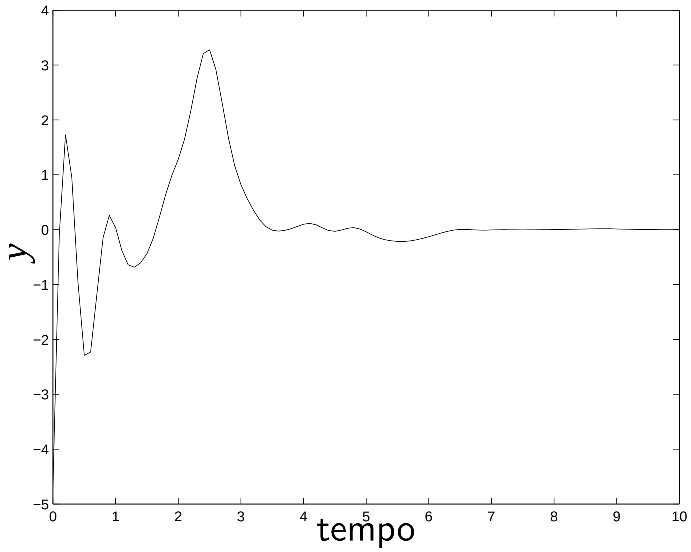
Sistemas Dinâmicos Lineares

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad y = Cx + Du$$

- Sistemas Autônomos ($u = 0$): Comportamento pode ser determinado a partir de uma condição inicial conhecida



- Pode ser alterado através da entrada $u(t)$



$\rightsquigarrow$ Comportamento pode ser estudado a partir dos "modos"

Sistemas Não Lineares

- Comportamento pode ser imprevisível, dependente da condição inicial, caótico, ...