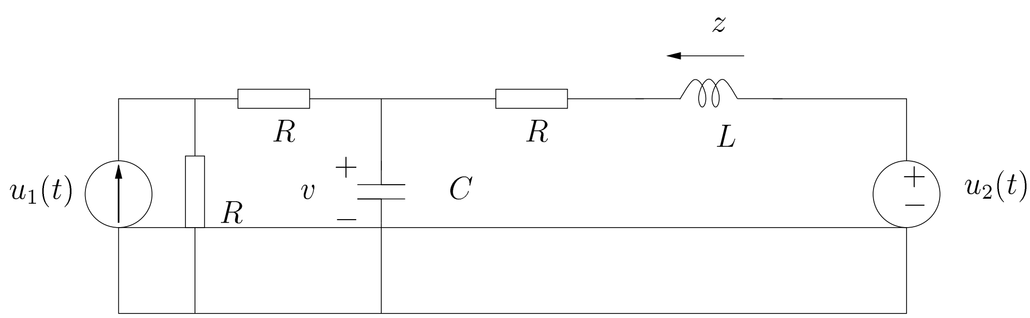
Prova P1: 25 de Abril de 2001 Prof.: Pedro Peres

Nome: .... **RA:** ....

2.0 **1ª Questão:** Considere o circuito abaixo, no qual as variáveis de estado são z (corrente no indutor) e v (tensão no capacitor), $u_1(t)$ é uma fonte de corrente, $u_2(t)$ é uma fonte de tensão, e a saída y é a própria tensão v do capacitor.



a) Obtenha as equações de estado na forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad y = Cx + Du \quad \text{com } x \triangleq \begin{bmatrix} v \\ z \end{bmatrix} \quad ; \quad u \triangleq \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

b) Considerando $R = L = 1$ e $C = 0.5$, obtenha a matriz de transferência $H(s)$

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

com $Y(s)$ a transformada de Laplace da saída $y(t)$ e $U(s)$ o vetor da transformada de Laplace de $u(t)$.

2.0 **2ª Questão:** Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 5}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Qual o rank de A ($\rho(A)$)?

b) Qual a dimensão do espaço nulo de A ($\nu(A)$)?

c) Obtenha uma base para $\mathcal{R}(A)$ (range de A)

d) Obtenha uma base para $\mathcal{N}(A)$ (espaço nulo de A)

1.5 **3ª Questão:** Considere a base B para polinômios de grau menor ou igual a 3 formada pelos vetores $\{1, t, t^2, t^3\}$.

a) Encontre a representação β do vetor $x(t) = 2t^3 - 3t^2 + 2t + 1$ na base B.

b) Encontre a matriz P que leva uma representação β de um vetor x na base B para $\bar{\beta}$ na base $\bar{B} = \{t^3 - 1, t^2 - 1, t - 1, 1\}$.

c) Encontre a representação na base B da transformação linear $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ que leva um polinômio pertencente ao espaço para um outro polinômio do mesmo espaço igual à derivada do primeiro, ou seja, se $p(t)$ é um polinômio, então

$$T[p(t)] = \frac{d}{dt}\, p(t)$$

1.5 **4ª Questão:** Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que um autovetor à direita x associado ao autovalor λ é ortogonal ao autovetor à esquerda y associado a um autovalor $\beta \neq \lambda$.

$$Ax = \lambda x \quad ; \quad y'A = \beta y' \qquad ; \qquad x \perp y \implies \langle x, y \rangle = x'y = 0$$

1.5 **5ª Questão:** Determine a representação na Forma de Jordan J para a matriz A com polinômio característico $\Delta(\lambda)$ abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

1.5 **6ª Questão:** Determine α, β e γ tais que para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

tenha-se

$$A^{-1} = \alpha \mathrm{I} + \beta A + \gamma A^2$$