Estimadores ou Observadores de Estado: sistemas SISO

Realimentação: pressupõe estados x disponíveis

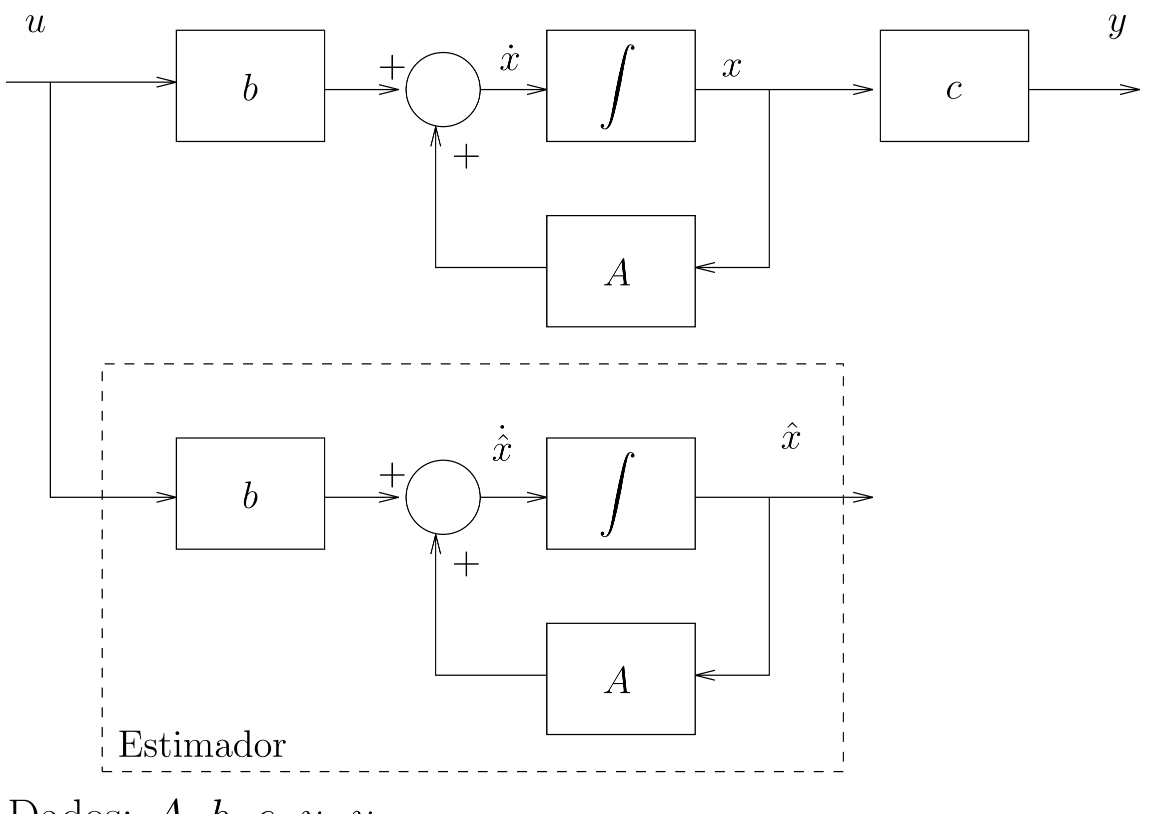
$$u = r - kx$$

- alguns estados podem não ser acessíveis
- limitação quanto ao número de medidores

Estimador de Estado — Malha Aberta

$$\dot{x} = Ax + bu \quad ; \quad y = cx$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu$$



Dados: A, b, c, u, y

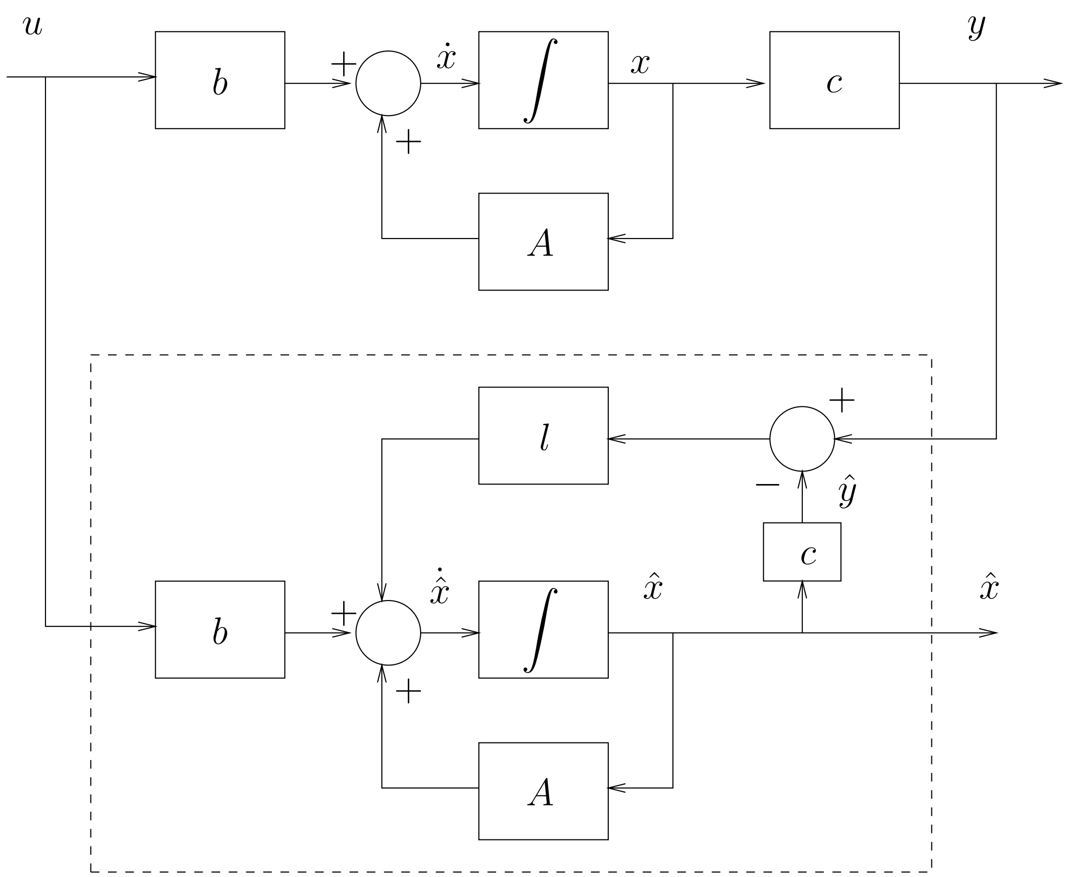
Se $\hat{x}(0) = x(0)$, então $\hat{x}(t) = x(t)$, $\forall\ t \geq 0$.

(A, c) observável $\Longleftrightarrow$ $x(0)$ pode ser determinado através de u e y.

Desvantagens

- cálculo de $x(0)$
- se A for instável

Além disso, a saída $y(t)$ não está sendo usada. Incluindo uma comparação de $cx(t)$ com $c\hat{x}(t)$ ponderada por um ganho constante l, tem-se:



Estimador assintótico ou em malha fechada

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(y - c\hat{x}) \ , \quad l_{n\times 1}$$

$$= (A - lc)\hat{x} + bu + ly$$

Definindo o erro $e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$

$$\dot{e} = Ax + bu - (A - lc)\hat{x} - bu - l(cx)$$
$$= (A - lc)(x - \hat{x}) = (A - lc)e$$

Se os autovalores de $(A - lc)$ puderem ser arbitrariamente alocados, controla-se a taxa com que o erro $e(t)$ tende a zero.

Se o estado estimado $\hat{x}(t)$ vai ser usado para a realimentação, os autovalores do estimador devem ser mais "rápidos" do que os autovalores em malha fechada do sistema controlado (isto é, parte real mais negativa).

Teorema: Os autovalores de $(A - lc)$ podem ser alocados arbitrariamente através da escolha de um ganho l se e somente se o par (A, c) for observável.

Prova: por dualidade, se (A', c') é controlável, então os autovalores de $(A' - c'k)$ podem ser alocados arbitrariamente. Basta fazer $l = k'$.

Projeto de estimador de ordem n para o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx\end{aligned}$$

usando equação de Lyapunov (dual à alocação de pólos):

1) Escolha uma matriz $F \in \Re^{n\times n}$ estável com os autovalores desejados (distintos de A).

2) Escolha l arbitrário tal que (F, l) seja controlável.

3) Obtenha a solução única T da equação de Lyapunov

$$TA - FT = lc$$

$\Longrightarrow$ condições duais para que T seja não singular

4) A equação de estado

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Fz + Tbu + ly \\ \hat{x} &= T^{-1}z\end{aligned}$$

gera um estimador para x.

Definindo $e \triangleq z - Tx$

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{x} = Fz + Tbu + lcx - TAx - Tbu$$

e, como $TA = FT + lc$, tem-se

$$\dot{e} = Fz + lcx - (FT + lc)x = F(z - Tx) = Fe$$

Se F é estável, $e(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, e $z \to Tx$, e portanto $T^{-1}z$ é um estimador para x.

Estimador de estado de ordem reduzida

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = cx$$

Se o sistema é observável, pode ser colocado na forma canônica observável. Por exemplo, para $n = 4$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Note que $y(t) = x_1(t)$ (primeira variável de estado), e portanto pode-se construir um estimador de estado apenas para as demais variáveis x_i, $i = 2, 3, \ldots, n$

Método por equação de Lyapunov

1) Escolha $F \in \Re^{(n-1)\times(n-1)}$ estável com autovalores distintos de A.

2) Escolha l arbitrário tal que (F, l) seja controlável.

3) Obtenha a solução única $T \in \Re^{(n-1)\times n}$ da equação de Lyapunov $TA - FT = lc$

4) A equação de estado $(n-1)$-dimensional estima x

$$\dot{z} = Fz + Tbu + ly$$
$$\hat{x} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Note que a equação

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

pode ser escrita

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix} \hat{x}$$

e portanto $y = c\hat{x}$ e $z = T\hat{x}$. Então, y é um estimador para cx e z para Tx, pois

$$e = z - Tx$$

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{x} = Fz + Tbu + lcx - TAx - Tbu = Fe$$

e, novamente, se F é estável, então $e(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Teorema:

Se A e F não têm autovalores em comum, então a matriz quadrada

$$P \triangleq \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix}$$

com T solução única de $TA - FT = lc$ é não singular se e somente se (A, c) for observável e (F, l) for controlável.

Prova: Segue passos similares aos da prova para a realimentação de estados. Considere $n = 4$ e

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - A) = s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4$$

Pode-se mostrar que

$$-\Delta(F)T = \begin{bmatrix} l & Fl & F^2 l & F^3 l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ cA^3 \end{bmatrix}$$

e $\Delta(F)$ é não-singular se A e F não tiverem autovalores em comum. Note que F é 3×3 e A é 4×4.

Considerando o lado direito da igualdade acima, a matriz do meio (denotada Λ) é sempre não singular, a da direita (denotada $\mathfrak{O}$) é a matriz de observabilidade de (A, c) e a da esquerda (denotada $\mathfrak{C}_4$) é a de controlabilidade de (F, l) acrescida da coluna $F^3 l$. Assim, $T = -\Delta^{-1}(F)\mathfrak{C}_4 \Lambda \mathfrak{O}$ e a matriz P pode ser escrita

$$P = \begin{bmatrix} c \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -\Delta^{-1}(F)\mathfrak{C}_4 \Lambda \mathfrak{O} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Delta^{-1}(F) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \mathfrak{C}_4 \Lambda \mathfrak{O} \end{bmatrix}$$

Como $n = 4$, P, $\mathfrak{O}$ e Λ são 4×4; T e $\mathfrak{C}_4$ são 3×4 e $\Delta(F)$ é 3×3.

Se (F, l) não é controlável, $\mathfrak{C}_4$ tem rank no máximo igual a 2, T tem rank no máximo igual a 2 e P é singular. Se (A, c) não é observável, existe $r \in \Re^{4 \times 1}$ tal que $\mathfrak{O} r = 0$, o que implica $cr = 0$ e $Pr = 0$, e portanto P é singular. Com isso, a necessidade está provada.

Para mostrar a suficiência, por contradição, supõe-se P singular. Nesse caso, existe $r \neq \mathbf{0}$ tal que $Pr = 0$, e

$$\begin{bmatrix} c \\ \mathfrak{C}_4 \Lambda \mathfrak{O} \end{bmatrix} r = \begin{bmatrix} cr \\ \mathfrak{C}_4 \Lambda \mathfrak{O} r \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Definindo $a \triangleq \Lambda \mathfrak{O} r = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \bar{a} & a_4 \end{bmatrix}'$, ou seja

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ cA^3 \end{bmatrix} r$$

Portanto, $a_4 = cr$ e, da equação anterior, $cr = 0$. Substituindo $a_4 = 0$ em $\mathfrak{C}_4 \Lambda \mathfrak{O} r$ tem-se

$$\mathfrak{C}_4 \Lambda \mathfrak{O} r = \mathfrak{C}_4 a = \mathfrak{C} \bar{a} = \mathbf{0}$$

sendo $\mathfrak{C}$ a matriz de controlabilidade de (F, l) e, se o par (F, l) é controlável, $\mathfrak{C} \bar{a} = \mathbf{0}$ implica $\bar{a} = \mathbf{0}$ e portanto $a = \mathbf{0}$.

Considere agora $\Lambda \mathfrak{O} r = a = \mathbf{0}$. A matriz Λ é sempre não singular. Se (A, c) é observável, $\mathfrak{O}$ é não singular e $\Lambda \mathfrak{O} r = \mathbf{0}$ implica $r = \mathbf{0}$, o que contradiz a hipótese inicial.

Assim, se (A, c) é observável e (F, l) é controlável, P é não singular.

Realimentação a partir de Estados Estimados

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{aligned}$$

Se (A, b) é controlável, a realimentação de estados $u = r - kx$ pode alocar os autovalores de $(A - bk)$ arbitrariamente.

- Estados não disponíveis: observador de estados

Se (A, c) é observável, um observador de estados de ordem completa ou reduzida com autovalores arbitrários pode ser construído.

Estimador de ordem n

$$\dot{\hat{x}} = (A - lc)\hat{x} + bu + ly$$

A escolha de l (ou melhor, dos autovalores de $(A - lc)$) determina a taxa com que o estado estimado $\hat{x}$ aproxima-se do estado do sistema.

Realimentando os estados estimados:

$$u = r - k\hat{x}$$

- Os autovalores de $(A - bk)$ e de $(A - lc)$ se alteram devido à conexão?

- O estimador altera a função de transferência de r para y?

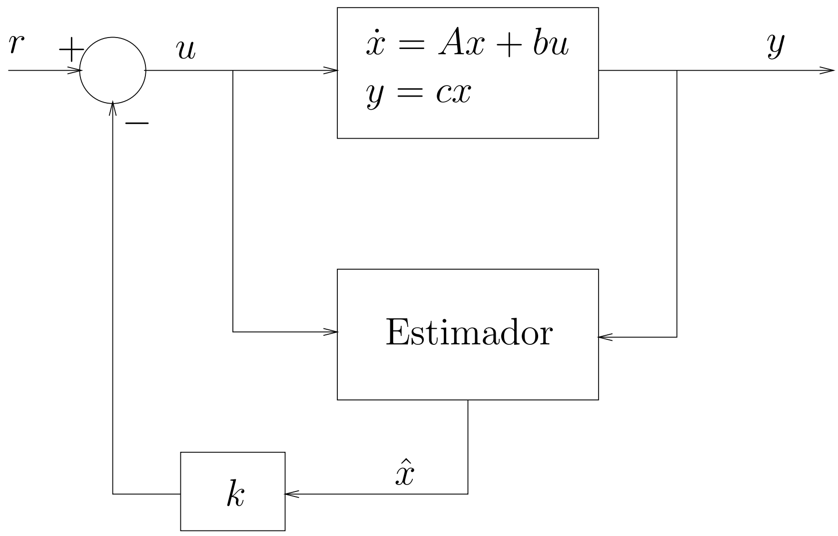
Combinando as equações

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - bk\hat{x} + br \\ \dot{\hat{x}} &= (A - lc)\hat{x} + b(r - k\hat{x}) + lcx\end{aligned}$$

tem-se o sistema de dimensão igual a $2n$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -bk \\ lc & A - lc - bk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} c & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$



Transformação de equivalência

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$P \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad ; \quad P^{-1} = P$$

Sistema equivalente

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - bk & bk \\ \mathbf{0} & A - lc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} c & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

• Autovalores da matriz dinâmica são a união dos autovalores de $(A - bk)$ e $(A - lc)$; portanto o estimador não altera os autovalores nem tem seus autovalores modificados pela conexão (princípio da separação).

• Note que o sistema aumentado é não controlável (forma canônica), e que a função de transferência do sistema é igual à da equação

$$\dot{x} = (A - bk)x + br \quad ; \quad y = cx$$

dada por

$$G_f(s) = c(s\mathbf{I} - A + bk)^{-1}b$$

$\Longrightarrow$ não aparece o estimador.

• De fato, no cômputo de funções de transferência, as condições iniciais são assumidas iguais a zero: $x(0) = \hat{x}(0) = 0$.

$\Longrightarrow$ $x(t) = \hat{x}(t)$ para todo t

$\Longrightarrow$ Função de transferência de r para y não é afetada pela presença ou não do estimador.