Estabilidade e Controle de Sistemas Lineares através de Desigualdades Matriciais Lineares

• Estabilidade

O sistema linear descrito por $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável se e somente se qualquer uma das condições equivalentes abaixo for verificada:

i) Para qualquer condição inicial $x(0)$, $\lim_{t\to\infty} x(t) \to 0$

ii) $\max_i \operatorname{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0$

iii) Para qualquer matriz $Q = Q' > 0$, a única solução simétrica P da equação de Lyapunov $A'P + PA + Q = 0$ é definida positiva.

iv) Existir $P = P' > 0$ solução de

$$A'P + PA < 0$$

v) Existir $W = W' > 0$ solução de

$$AW + WA' < 0$$

vi) Para qualquer matriz $Q = Q' \geq 0$, existir $P = P' > 0$ solução de

$$A'P + PA + Q < 0$$

vii) Existirem $P = P' > 0$, X_1 e X_2 tais que

$$\begin{bmatrix} X_1A + A'X_1' & P - X_1 + A'X_2' \\ P - X_1' + X_2A & -X_2 - X_2' \end{bmatrix}$$

Desigualdades Matriciais Lineares

As condições *iv)-vii)* são desigualdades matriciais lineares, ou LMIs (em inglês, *Linear Matrix Inequalities*).

Empilhando as variáveis de decisão (incógnitas) em um único vetor $x \in \mathbb{R}^m$, pode-se re-escrever uma LMI na forma

$$F(x) \triangleq F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_m F_m > 0$$

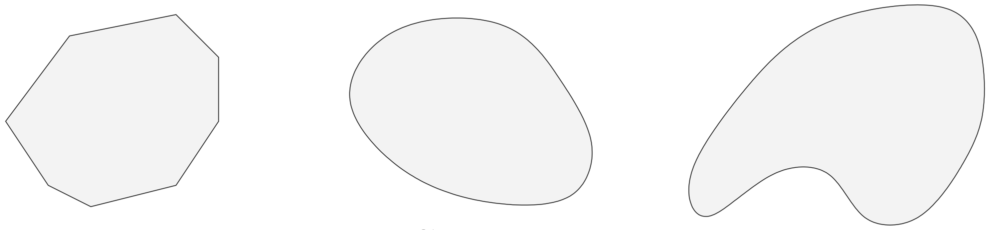
com $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \ldots, m$ matrizes contantes simétricas. Note que $F(x) > 0$ significa que $F(x)$ deve ser definida positiva para todo x, ou seja, $y' F(x) y > 0$ para todo vetor $y \neq 0$.

A LMI $F(x) > 0$ é equivalente a um conjunto de n desigualdades polinomiais em x, obtidas impondo-se que os menores principais líderes de $F(x)$ devem ser todos positivos.

A LMI $F(x) > 0$ é uma restrição convexa, isto é, o conjunto

$$\{x \;:\; F(x) > 0\}$$

é um conjunto convexo.



Convexo Convexo Não convexo

Desigualdades Matriciais Lineares

Desigualdades convexas podem ser convertidas em LMIs através do complemento de Schur. Basicamente, a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

com $Q(x) = Q(x)'$, $R(x) = R(x)'$ e $S(x)$ todas dependendo de maneira afim da variável x equivale a

$$R(x) > 0 \quad , \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)' > 0$$

Exemplo: A restrição sobre a norma da matriz $\|M(x)\| < 1$ (máximo valor singular), com $M(x) \in \mathbb{R}^{p\times q}$ dependendo de maneira afim em x, pode ser escrita como a LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & M(x) \\ M(x)' & \mathbf{I}_q \end{bmatrix} > 0$$

pois $\|M\| < 1$ equivale a $\mathbf{I}_p - MM' > 0$. O caso $q = 1$ reduz-se a uma desigualdade quadrática convencional em x.

Exemplo: A restrição $c(x)'P(x)^{-1}c(x) < 1$, $P(x) > 0$, com $c(x) \in \mathbb{R}^n$ e $P(x) = P(x)' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dependendo de maneira afim de x, pode ser expressa em termos da LMI

$$\begin{bmatrix} P(x) & c(x) \\ c(x)' & 1 \end{bmatrix} > 0$$

Complemento de Schur

Para $Q = Q' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R = R' \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $S \in \mathbb{R}^{n\times m}$, as seguintes condições são equivalentes:

i) $\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} > 0$

ii) $R > 0$, $Q - SR^{-1}S' > 0$

- Note que, definindo

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -R^{-1}S' & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$T' \begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} Q - SR^{-1}S' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{bmatrix}$$

e como T é uma matriz não singular,

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} Q - SR^{-1}S' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R \end{bmatrix} > 0$$

- T não singular define uma **transformação de congruência**.

Duas matrizes simétricas $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são congruentes se existir $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular tal que $A = T'BT$. Se A e B são congruentes, então $A > 0$ se e somente se $B > 0$.

$B > 0 \Longrightarrow \forall x \neq 0,\ x'Bx > 0$. Definindo $x = T^{-1}y$, tem-se $x'Bx = y'T'BTy = y'Ay > 0, \forall y \neq 0 \Longrightarrow A > 0$.

LMIs

• Existem programas computacionais especializados (algorimos convergem em tempo polinomial) na resolução de LMIs (LMI Control Toolbox (Matlab), Lmitool (Matlab e Scilab), SeDuMi, LMI Solver

• Inúmeros problemas de controle podem ser formulados como LMIs

• Outras aplicações (mecânica, otimização, etc.)

• Algumas referências:

  • Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.

  • Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox for use with Matlab*, User's Guide, The Math Works Inc.

  • Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653.
  URL: http://fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html.

Estabilidade

A é assintoticamente estável se e somente se, para qualquer $Q = Q' > 0$, existir $P = P' > 0$ solução de

i) $A'P + PA + Q = 0$ (equação de Lyapunov)

ii) $A'P + PA + Q < 0$

A condição *i)* define um sistema de equações lineares e possui solução algébrica, ao passo que *ii)* é uma LMI (solução numérica).

- A solução do problema convexo de otimização

$$\min \mathbf{Tr}(P)$$

sujeito a

$$A'P + PA + Q < 0 \ \ ; \ \ P = P' > 0$$

produz como resultado a matriz P solução da equação de Lyapunov.

Note que as condições de estabilidade *iv)* e *vii)* se relacionam por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 A + A' X_1' & P - X_1 + A' X_2' \\ P - X_1' + X_2 A & -X_2 - X_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ A \end{bmatrix} = A'P + PA$$

$\rightarrow$ Generalização da transformação de congruência com $T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, válida apenas se T tiver posto completo de colunas.

Estabilização

Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Existe uma lei de controle de realimentação de estados que estabiliza o sistema se e somente se existirem $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $P = P' > 0$ tais que

$$(A + BK)'P + P(A + BK) < 0$$

• Não é uma LMI nas variáveis K e P:

$$A'P + K'B'P + PA + PBK < 0$$

Multiplicando à esquerda e à direita por P^{-1}

$$P^{-1}A' + P^{-1}K'B' + AP^{-1} + BKP^{-1} < 0$$

e fazendo a mudança de variáveis $Z = KP^{-1}$ e $W = P^{-1}$, tem-se: o sistema é estabilizável se e somente se existir $W = W' > 0$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ factíveis para as LMIs

$$AW + WA' + Z'B' + BZ < 0 \ \ ; \ \ W > 0$$

No caso afirmativo, $K = ZW^{-1}$ é o ganho estabilizante.

• Mudança de variáveis foi usada em inúmeros problemas de controle e de filtragem, principalmente no contexto de sistemas com incertezas (controle e filtragem robustos), resultando em formulações convexas (LMIs).

Normas para Sinais

- Uma norma satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\|u\| \geq 0$;

ii) $\|u\| = 0 \iff u(t) = 0 \;\; \forall\, t$;

iii) $\|\alpha u\| = \mid \alpha \mid \|u\| \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;

iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Exemplos

- Norma-1

$$\|u\|_1 \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \mid u(t) \mid dt$$

- Norma-2

$$\|u\|_2 \triangleq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Norma-∞

$$\|u\|_\infty \triangleq \sup_t \; \mid u(t) \mid$$

Normas para Sistemas

- Sistemas lineares causais invariantes no tempo

$$y(t) = \int_0^t G(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Sendo $G(t)$ a matriz de resposta ao impulso e $G(s)$ a função de transferência do sistema (transformada de Laplace de $G(t)$).

Sistemas Monovariáveis SISO

$G(s)$: função racional com coeficientes reais

$G(s)$ estável $\Rightarrow$ analítica no semi-plano direito (Real $s \geq 0$)

$G(s)$ própria $\Rightarrow$ $G(\infty)$ finito (grau $N(s) \leq$ grau $D(s)$)

$G(s)$ estritamente própria $\Rightarrow$ $G(\infty) = 0$ (grau $N(s) <$ grau $D(s)$)

$G(s)$ biprópria ($G(s)$ e $G^{-1}(s)$ próprias) (grau $N(s) =$ grau $D(s)$)

Definições

- Norma-2

$$\|G\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mid G(j\omega) \mid^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Norma-∞

$$\|G\|_\infty \triangleq \sup_\omega \ \mid G(j\omega) \mid$$

Para $G(s)$ estável, pelo teorema de Parseval

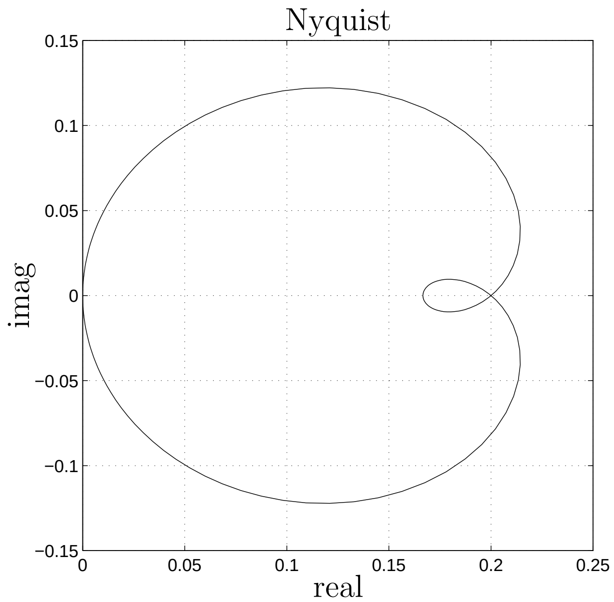
$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mid G(j\omega) \mid^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mid G(t) \mid^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

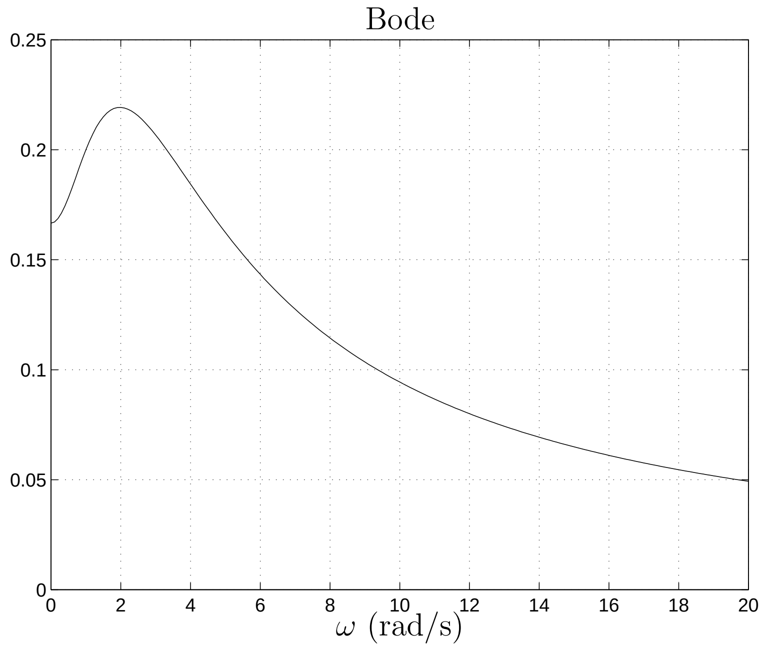
Lema: A norma 2 de $G(s)$ é finita se e somente se $G(s)$ é estritamente própria e não possui nenhum pólo no eixo imaginário.

Lema: A norma ∞ de $G(s)$ é finita se e somente se $G(s)$ é própria e não possui nenhum pólo no eixo imaginário.

• A norma ∞ iguala-se à distância no plano complexo da origem ao ponto mais distante no diagrama de Nyquist de $g(s)$ ou, equivalentemente, ao valor de pico no diagrama de magnitude de Bode.

Exemplo: $$g(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$





Sistemas Multivariáveis

Considere $H(s)$ uma matriz de transferência estável e estritamente própria obtida a partir da realização

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_f x + B_1 w \\ y &= C_f x \end{aligned}$$

$$A_f \triangleq A + B_2 K \quad ; \quad C_f \triangleq C + DK$$

As normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ são definidas por:

- Norma $\mathcal{H}_2$

$$\|H(s)\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Tr}\ [H^*(j\omega)H(j\omega)] d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \sigma_i\ [H(j\omega)] d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Obs.: $\sigma_i(M) = \lambda^{\frac{1}{2}}(M^* M)$ (valor singular de M)

- Norma $\mathcal{H}_\infty$

$$\|H(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}_+} \sigma_{max}[H(j\omega)]$$

Obs.: $\sigma_{max}(\cdot)$ é o valor singular máximo

Caracterização no espaço de estados

• Norma $\mathcal{H}_2$

$$\|H(s)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B_1' L_o B_1) = \mathbf{Tr}(C_f L_c C_f')$$

Sendo L_o o Gramiano de observabilidade e L_c o Gramiano de controlabilidade, soluções das equações

$$A_f L_c + L_c A_f' + B_1 B_1' = \mathbf{0} \quad ; \quad A_f' L_o + L_o A_f + C_f' C_f = \mathbf{0}$$

Ou: $\|H(s)\|_2^2 = \min_{X,W} \ \mathbf{Tr}(X)$ sujeito a

$$\begin{bmatrix} W & W C_f' \\ C_f W & X \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad ; \quad W > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -(A_f W + W A_f') & B_1 \\ B_1' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

• Norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser calculada (de maneira iterativa) a partir da relação entre um limitante superior $\gamma > 0$ e a existência de uma matriz definida positiva P solução de

$$A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_f' C_f < \mathbf{0}$$

Ou: $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir $W > \mathbf{0}$ tal que

$$\begin{bmatrix} -(A_f W + W A_f') & B_1 & W C_f' \\ B_1' & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ C_f W & \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Otimização $\mathcal{H}_2$

Chamando de $\mathcal{K}$ o conjunto dos ganhos de realimentação de estados estabilizantes, o problema de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ pode ser escrito na forma

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \quad \|H(s)\|_2^2$$

ou, equivalentemente,

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \quad \mathbf{Tr}\ \{B_1' P B_1\}$$

sujeito a

$$(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0}$$

Deixando de lado a restrição $K \in \mathcal{K}$ e definindo $W = W'$ como sendo a variável dual associada à restrição, tem-se o lagrangeano $\mathcal{L}(P, W, K)$ dado por

$$\mathcal{L}(P, W, K) = \mathbf{Tr}\Big(B_1' P B_1 +$$

$$+ W[(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK)]\Big)$$

As condições necessárias de otimalidade fornecem

$$(A + B_2K)W + W(A + B_2K)' + B_1B_1' = \mathbf{0}$$

$$(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0}$$

$$2[D'DK + B_2'P]W = \mathbf{0}$$

Se W for definida positiva, a solução em termos de K é única, assegurando a estabilidade do sistema em malha fechada:

$$K = -(D'D)^{-1}B_2'P$$

Substituindo, obtém-se a equação de Riccati

$$A'P + PA - PB_2(D'D)^{-1}B_2'P + C'C = \mathbf{0}$$

O valor ótimo da norma $\mathcal{H}_2$ é

$$\min \|H(s)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B_1'PB_1)$$

sendo P a solução da equação de Riccati.

- Relação com o problema linear quadrático

$$\min_K \ J = \int_0^\infty y'y \ dt$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_2u \quad ; \quad x_0 \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

com $D'D > \mathbf{0}$ e $C'D = \mathbf{0}$. A solução ótima $u = Kx$ é dada por $K = -(D'D)^{-1}B_2'P$ e $P = P > \mathbf{0}$ é a solução da equação de Riccati. Portanto, o ganho ótimo coincide com o obtido pela otimização $\mathcal{H}_2$, e o valor mínimo do critério J iguala o da norma $\mathcal{H}_2$ sempre que

$$x_0'Px_0 = \mathbf{Tr}(B_1'PB_1)$$

ou seja, sempre que $x_0x_0' = B_1B_1'$.

Otimização $\mathcal{H}_\infty$

Para $\gamma > 0$, a realimentação $u = Kx$ com $K = -(D'D)^{-1}B_2'P$ e $P = P > \mathbf{0}$ solução da equação de Riccati dada por

$$A'P + PA + P(\gamma^{-2}B_1B_1' - B_2(D'D)^{-1}B_2')P + C'C = \mathbf{0}$$

garante $\|H(s)\|_\infty < \gamma$.

• Caracterização "sub-ótima". O valor de γ pode ser iterativamente diminuído até atingir-se o mínimo.

• Um conjunto de ganhos que garantem a atenuação mínima igual a γ pode ser caracterizado a partir da inequação

$$A'P + PA + P(\gamma^{-2}B_1B_1' - B_2(D'D)^{-1}B_2')P + C'C < \mathbf{0}$$

A escolha de um elemento no conjunto pode ser ditada por outro critério, por exemplo, a norma $\mathcal{H}_2$ (problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$).

• A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode também ser caracterizada como um "ganho induzido". Assumindo que o vetor de entradas w pertença ao conjunto de sinais quadraticamente integráveis (sinais de energia) e que o sistema seja estável, então a saída y também pertence à classe de sinais quadraticamente integráveis. A norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser definida (inclusive para sistemas não lineares) como o máximo valor de γ para o qual

$$\|y\|_2 \ \leq \ \gamma \ \|w\|_2$$

Ou: $\|H(s)\|_\infty \triangleq \max\limits_{\|w\|_2=1} \|y\|_2$

Caracterização por LMIs

Com a mudança de variáveis $Z = KW$, os problemas de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ por realimentação de estados podem ser transformados em problemas convexos de otimização descritos por LMIs (Linear Matrix Inequalities).

- Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$

$$\min_{X,Z,W} \ \mathbf{Tr}(X)$$

$$\begin{bmatrix} W & WC' + Z'D' \\ CW + DZ & X \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad ; \quad W > \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -AW - WA' - B_2Z - Z'B_2' & B_1 \\ B_1' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

$$K = ZW^{-1} \quad ; \quad \min \|H(s)\|_2 = \min \mathbf{Tr}(X)$$

- Controle Ótimo $\mathcal{H}_\infty$

$$\min_{Z,W} \ \delta$$

$$\begin{bmatrix} -AW - WA' - B_2Z - Z'B_2' & B_1 & WC' + Z'D' \\ B_1' & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ CW + DZ & \mathbf{0} & \delta\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}\,; \, W > \mathbf{0}$$

$$K = ZW^{-1} \quad ; \quad \gamma = \sqrt{\delta} = \|H(s)\|_\infty$$