Critério de Routh-Hurwitz

A BIBO estabilidade de um sistema está associada aos pólos de sua matriz de transferência. Cada elemento $G_{ij}(s)$ pode ser escrito na forma

$$\frac{N(s)}{D(s)} \qquad \text{função racional de } s$$

e se $N(s)$ e $D(s)$ não possuírem fatores comuns, as raízes de $D(s)$ são os pólos de $G_{ij}(s)$.

Um polinômio é **Hurwitz** se todas as raízes do polinômio têm parte real negativa

$$\text{BIBO-estável} \qquad \Longleftrightarrow \qquad D(s) \;\; \text{é Hurwitz}$$

• A BIBO estabilidade pode ser inferida a partir do cálculo das raízes de $D(s)$.

• O cálculo das raízes pode ser numericamente dispendioso.

• A localização exata das raízes não é necessária para se concluir sobre a BIBO estabilidade.

• O critério de Routh-Hurwitz fornece condições para se testar se um polinômio é ou não Hurwitz sem o cálculo explícito das raízes.

Considere o polinômio com coeficientes reais

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad , \quad (a_0 > 0)$$

$$= a_0 \prod_k (s + \alpha_k) \prod_i (s + \beta_i + j\omega_i)(s + \beta_i - j\omega_i)$$

$$= a_0 \prod_k (s + \alpha_k) \prod_i (s^2 + 2\beta_i s + \beta_i^2 + \omega_i^2)$$

$$\alpha_k > 0 \ , \ \beta_i > 0$$

$$D(s) \ \text{Hurwitz} \quad \Longrightarrow \quad a_i > 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

• O inverso no entanto não é verdadeiro.

$s^3 + s^2 + 11s + 51 = (s+3)(s-1+j4)(s-1-j4)$ não é Hurwitz

Separe $D(s)$ em dois polinômios

$$D(s) = D_0(s) + D_1(s)$$

$D_0(s) = a_0 s^n + a_2 s^{n-2} + \cdots \quad ; \quad D_1(s) = a_1 s^{n-1} + a_3 s^{n-3} + \cdots$

com o grau de $D_0(s)$ = grau de $D_1(s) + 1$. Por exemplo,

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 4s + 1$$

$$D_0(s) = s^4 + 6s^2 + 1 \quad ; \quad D_1(s) = 2s^3 + 4s$$

Considere a seguinte expansão (expansão de Stieljes)

$$\frac{D_0(s)}{D_1(s)} = \frac{s^4 + 6s^2 + 1}{2s^3 + 4s} = \frac{1}{2}s + \cfrac{1}{\frac{1}{2}s + \cfrac{1}{\frac{8}{7}s + \cfrac{1}{\frac{7}{2}s}}}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \;\; ; \;\; \alpha_2 = \frac{1}{2} \;\; ; \;\; \alpha_3 = \frac{8}{7} \;\; ; \;\; \alpha_4 = \frac{7}{2} \;\; ;$$

No caso geral,

$$\frac{D_0(s)}{D_1(s)} = \alpha_1 s + \cfrac{1}{\alpha_2 s + \cfrac{1}{\alpha_3 s + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\alpha_{n-1} s + \cfrac{1}{\alpha_n s}}}}}$$

Teorema

O polinômio $D(s)$ é Hurwitz se e somente se os n números α_1, α_2, $\ldots$, α_n são positivos.

Prova

Assuma que todos os α_i são diferentes de 0 e considere a função racional

$$g(s) \triangleq \frac{D_1(s)}{D(s)} = \frac{D_1(s)}{D_0(s) + D_1(s)} = \frac{1}{1 + D_0(s)/D_1(s)}$$

A hipótese $\alpha_i \neq 0$ implica que não há fatores comuns entre $D_0(s)$ e $D_1(s)$ e, conseqüentemente, não há fatores comuns entre $D_1(s)$ e $D(s)$ ($g(s)$ é irredutível).

Uma realização de $g(s)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha_n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\alpha_{n-1}} & 0 & \frac{1}{\alpha_{n-1}} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\alpha_{n-2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{\alpha_2} & 0 & \frac{1}{\alpha_2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-1}{\alpha_1} & \frac{-1}{\alpha_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

- O polinômio característico de A é igual ao denominador de $g(s)$.

- O teorema de Lyapunov pode ser utilizado para analisar a estabilidade de $\dot{x} = Ax$ através da solução da equação

$$A'M + MA = -N$$

• A equação $A'M + MA = -N$ é satisfeita para

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad N \triangleq - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

• Neste caso, N é uma matriz semidefinida positiva e portanto o resultado do corolário do teorema de Lyapunov pode ser usado.

• O sistema $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável se e somente se M for definida positiva ou, equivalentemente, se e somente se os n números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ forem positivos. Portanto, $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores têm parte real negativa ou, equivalentemente, se todas as raízes de $D(s)$ têm parte real negativa.

A obtenção dos coeficientes α_i, $i = 1, \ldots, n$ pode ser sistematizada a partir da tabela de Routh.

Tabela de Routh: assuma que n é par e defina $n' \triangleq \dfrac{n}{2}$

$$D_0(s) = a_0^0 s^n + a_1^0 s^{n-2} + \cdots + a_{n'-1}^0 s^2 + a_{n'}^0$$

$$D_1(s) = a_0^1 s^{n-1} + a_1^1 s^{n-3} + \cdots + a_{n'-1}^1 s$$

s^n	a_0^0	a_1^0	a_2^0	$\cdots$	$a_{n'-1}^0$	$a_{n'}^0$	
s^{n-1}	a_0^1	a_1^1	a_2^1	$\cdots$	$a_{n'-1}^1$		$\rightarrow \alpha_1 = a_0^0/a_0^1$
s^{n-2}	a_0^2	a_1^2	a_2^2	$\cdots$	$a_{n'-1}^2$		$\rightarrow \alpha_2 = a_0^1/a_0^2$
s^{n-3}	a_0^3	a_1^3	a_2^3	$\cdots$	$a_{n'-2}^3$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
s^2	a_0^{n-2}	a_1^{n-2}					
s^1	a_0^{n-1}						$\rightarrow \alpha_{n-1} = a_0^{n-2}/a_0^{n-1}$
s^0	a_0^n						$\rightarrow \alpha_n = a_0^{n-1}/a_0^n$

$$a_i^{k+2} = \frac{a_0^{k+1}a_{i+1}^k - a_0^k a_{i+1}^{k+1}}{a_0^{k+1}} = a_{i+1}^k - \alpha_{k+1}a_{i+1}^{k+1} \;;\; \alpha_{k+1} \triangleq \frac{a_0^k}{a_0^{k+1}}$$

Teorema: O polinômio $D(s)$ é Hurwitz se e somente se os n termos a_0^i, $i = 1, 2, \ldots, n$ da primeira coluna da tabela são todos positivos (ou, equivalentemente, se e somente se todos os coeficientes a_j^i da tabela são positivos).

Exemplos: 1) $s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 4s + 1$

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 6 & 1 \\ s^3 & 2 & 4 & \\ s^2 & 4 & 1 & \\ s^1 & 3.5 & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

Hurwitz

2) $3s^7 + 2s^6 + 2s^5 + s^4 + 3s^3 + s^2 + 1.5s + 1$

$$\begin{array}{lllll} s^7 & 3 & 2 & 3 & 1.5 \\ s^6 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ s^5 & 0.5 & 1.5 & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

não é Hurwitz

3) $2s^4 + 2s^3 + s^2 + 3s + 2$

$$\begin{array}{llll} s^4 & 2 & 1 & 2 \\ s^3 & 2 & 3 & \\ s^2 & -2 & \cdots & \\ \vdots & & & \end{array}$$

não é Hurwitz

4) $2s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 2s + 1$

$$\begin{array}{llll} s^4 & 2 & 5 & 1 \\ s^3 & 5 & 2 & \\ s^2 & 21 & 5 & \\ s^1 & 17 & & \\ s^0 & 5 & & \end{array}$$

Hurwitz

Tabela de Routh

Aparecendo um 0, pode-se concluir que o polinômio não é Hurwitz. Para se concluir que um polinômio é Hurwitz, é preciso completar a tabela e verificar que todos os coeficientes são positivos.

O sinal dos números da tabela não é afetado se uma determinada linha é multiplicada por um número positivo.

• A tabela de Routh pode também ser utilizada para se determinar o número de raízes no semi-plano complexo direito. Se $a_0^i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então o número de raízes no semi-plano direito é igual ao número de mudanças de sinal no conjunto $\{a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^n\}$.

• Coeficientes 0 na primeira coluna

Suponha $a_0^2 = 0$. Se todos os coeficientes da linha s^{n-2} forem zero, então $D_0(s)$ e $D_1(s)$ têm pelo menos um fator comum, que é uma função ímpar ou uma função par em s, por exemplo, $f(s)$, e $D(s)$ pode ser fatorado na forma $f(s)\bar{D}(s)$. Como nem todas as raízes de uma função par ou de uma função ímpar podem ter parte real negativa, $D(s)$ não é Hurwitz.

Se, por outro lado, nem todos os coeficientes da linha s^{n-2} forem zero, pode-se trocar $a_0^2 = 0$ por $a_0^2 = \epsilon$, $\epsilon > 0$ pequeno, e prosseguir completando a tabela. Se algum α_i for negativo, pelo menos uma das raízes de $D(s)$ ϵ-modificado tem parte real positiva, e como as raízes são funções contínuas dos coeficientes de um polinômio, quando $\epsilon \to 0$, pelo menos uma das raízes de $D(s)$ tem parte real nula ou positiva.

Polinômio $p(s) = s^n + c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0$

- Pelo menos um autovalor nulo $\Rightarrow c_0 = 0$
- Um par complexo conjugado com parte real nula

$$n = 2 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0 \quad ; \quad c_0 > 0$$

$$n = 3 \quad \Longrightarrow \quad c_0 - c_1 c_2 = 0 \quad ; \quad c_1 > 0$$

Para $n > 3$:
$p(s)$ possui um par de raízes não nulas $\{s, -s\}$ se e somente se s for uma raiz comum das duas equações

$$p(s) + p(-s) = 0 \quad ; \quad p(s) - p(-s) = 0$$

Substituindo $z = s^2$ e rearranjando, pode-se construir dois novos polinômios, r_e (com os coeficientes pares) e r_o (coeficientes ímpares). Para n par:

$$r_e(z) = c_0 + c_2 z + c_4 z^2 + \cdots + c_{n-2} z^{\frac{n-2}{2}} + z^{\frac{n}{2}}$$

$$r_o(z) = c_1 + c_3 z + c_5 z^2 + \cdots + c_{n-1} z^{\frac{n-2}{2}}$$

ou, para n ímpar:

$$r_e(z) = c_0 + c_2 z + c_4 z^2 + \cdots + c_{n-3} z^{\frac{n-3}{2}} + c_{n-1} z^{\frac{n-1}{2}}$$

$$r_o(z) = c_1 + c_3 z + c_5 z^2 + \cdots + c_{n-2} z^{\frac{n-3}{2}} + z^{\frac{n-1}{2}}$$

Note que

$$2\ r_e(s^2) = p(s) + p(-s) \quad ; \quad 2s\ r_o(s^2) = p(s) - p(-s)$$

Então, $p(s)$ possui um par de raízes não nulas $\{s, -s\}$ se existir z tal que

$$r_e(z) = 0 \quad ; \quad r_o(z) = 0$$

Dois polinômios possuem uma raiz comum se possuírem um fator comum, o que pode ser determinado pela divisão sucessiva de um polinômio pelo outro (algoritmo Euclidiano) ou pela matriz de Sylvester, construída a partir dos coeficientes dos dois polinômios.

Construa a matriz de Sylvester $S \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Para n par, a primeira linha é dada por

$$\left[\begin{array}{cccccccc} c_0 & c_2 & \cdots & c_{n-2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

e a $n/2$-ésima linha por

$$\left[\begin{array}{cccccccc} c_1 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

Para n ímpar, a primeira linha é dada por

$$\left[\begin{array}{cccccccc} c_0 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

e a $(n+1)/2$-ésima linha é dada por

$$\left[\begin{array}{cccccccc} c_1 & c_3 & \cdots & c_{n-2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

As demais linhas são obtidas pelos deslocamentos à direita dessas, até completar a matriz quadrada S. $\det(S) = 0$ implica que r_e e r_o têm uma raiz comum.

Teorema O polinômio $p(s)$ possui exatamente um par de raízes puramente imaginárias se

$$\det(S) = 0 \quad \text{e} \quad \det(S_0)\ \det(S_1) > 0$$

sendo que S_0 (remover linhas acima e colunas 1 e 2) e S_1 (remover linhas acima e colunas 1 e 3) são extraídas da matriz de Sylvester S.

Estabilidade de Sistemas Variantes no Tempo

Considere um sistema SISO variante no tempo descrito por

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t, \tau)u(\tau)d\tau$$

Este sistema é BIBO estável se toda entrada limitada causa uma saída também limitada.

O sistema acima é BIBO estável se e somente se existir uma constante M tal que

$$\int_{t_0}^{t} \mid g(t, \tau) \mid \ d\tau \leq M < \infty$$

para todo t, t_0 com $t \geq t_0$.

- Caso multivariável

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t, \tau)u(\tau)d\tau$$

A condição para BIBO estabilidade é que cada elemento de $G(t, \tau)$ satisfaça a relação acima. Essa condição pode ser expressa em termos de normas.

A condição necessária e suficiente para que um sistema multivariável seja BIBO estável é que exista M constante tal que

$$\int_{t_0}^{t} \|G(t,\tau)\| d\tau \leq M < \infty$$

para todo t, t_0 com $t \geq t_0$.

Considerando uma descrição por equações de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned}$$

tem-se que a matriz resposta ao impulso é dada por

$$G(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau) + D(t)\delta(t-\tau)$$

e a resposta ao estado inicial nulo é

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

Assim, a resposta ao estado inicial nulo da equação dinâmica é BIBO estável se e somente se existirem constantes M_1 e M_2 tais que

$$\|D(t)\| \leq M_1 < \infty$$

$$\int_{t_0}^{t} \|C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)\| d\tau \leq M_2 < \infty$$

para todo t, t_0 com $t \geq t_0$.

Estabilidade da Resposta à Entrada Nula

A resposta à entrada nula ou a equação

$$\dot{x} = A(t)x$$

é marginalmente estável se toda condição inicial finita provoca uma resposta limitada. Como a solução é governada por

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0)$$

tem-se que resposta à entrada nula é marginalmente estável se e somente se existir uma constante M tal que

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M < \infty$$

para todo t_0 e $t \geq t_0$.

A equação $\dot{x} = A(t)x$ é assintoticamente estável se a resposta a toda condição inicial finita for limitada e tender a zero quando $t \to \infty$, isto é

$$\|\Phi(t, t_0)\| \to 0 \quad \text{para} \quad t \to \infty$$

• No caso invariante no tempo, $\dot{x} = Ax$ é assintoticamente estável se todos os autovalores de A têm parte real negativa. Isso não é verdade no caso variante no tempo.

$$\dot{x} = A(t)x = \begin{bmatrix} -1 & \exp(2t) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

Polinômio característico: $\Delta(\lambda) = (\lambda + 1)^2$; Autovalores: -1 e -1

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} \exp(-t) & 0.5(\exp(t) - \exp(-t)) \\ 0 & \exp(-t) \end{bmatrix}$$

O elemento $(1, 2)$ cresce indefinidamente (sistema não é estável).

• Todas as propriedades de estabilidade de um sistema invariante no tempo se preservam sob transformações de equivalência.

• No caso variante no tempo a BIBO estabilidade se preserva pois a matriz resposta ao impulso não se altera com uma transformação de equivalência.

• Como entretanto é possível transformar $\dot{x} = A(t)x$ em $\dot{\bar{x}} = A_0\bar{x}$ com A_0 constante, a estabilidade marginal e a assintótica não se preservam sob qualquer transformação de equivalência.

Teorema

As estabilidades marginal e assintótica de $\dot{x} = A(t)x$ se preservam sob qualquer transformação de Lyapunov equivalente.

Como $P(t)$ e $\dot{P}(t)$ são contínuas, e $P(t)$ é não singular para todo t, então $\bar{x} = P(t)x$ é uma transformação algébrica. Se além disso $P(t)$ e $P^{-1}(t)$ são limitadas para todo t, $\bar{x} = P(t)x$ é uma transformação de Lyapunov. As matrizes fundamentais de $\dot{x} = A(t)x$ e $\dot{\bar{x}} = \bar{A}(t)\bar{x}$ se relacionam por

$$\bar{\psi}(t) = P(t)\psi(t)$$

e portanto

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(t,\tau) = \bar{\psi}(t)\bar{\psi}^{-1}(\tau) = P(t)\psi(t)\psi^{-1}(\tau)P^{-1}(\tau) \ &= \\ = \ P(t)\Phi(t,\tau)P^{-1}(\tau)&\end{aligned}$$

Como $P(t)$ e $P^{-1}(t)$ são limitadas, se $\|\Phi(t,\tau)\|$ é limitada, $\|\bar{\Phi}(t,\tau)\|$ também o é; se $\|\Phi(t,\tau)\| \to 0$ quando $t \to \infty$, o mesmo ocorre com $\|\bar{\Phi}(t,\tau)\|$.

• Em sistemas invariantes no tempo, a estabilidade assintótica da resposta à entrada nula implica na BIBO estabilidade da resposta ao estado inicial nulo.

• Não necessariamente é verdade para sistemas variantes no tempo.

A estabilidade assintótica ocorre se

$$\|\Phi(t,\tau)\| \to 0 \;\; \text{quando} \;\; t \to \infty$$

para todo t, t_0 com $t \geq t_0$.

A BIBO estabilidade ocorre se

$$\int_{t_0}^{t} \|C(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)\| d\tau < \infty$$

para todo t, t_0 com $t \geq t_0$.

• No entanto, uma função que tende a zero pode não ser absolutamente integrável.

• Se $\|\Phi(t,\tau)\|$ tende a zero rapidamente e se $B(t)$ e $C(t)$ são limitadas, a estabilidade assintótica implica na BIBO estabilidade.