Estabilidade Interna

A BIBO estabilidade é definida para a resposta ao estado inicial nulo. Para se estudar a resposta à entrada nula, considere o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

com uma condição inicial não nula x_0. A solução é dada por

$$x(t) = \exp(At)x_0$$

• A resposta à entrada nula de um sistema linear invariante no tempo ou a equação $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é **marginalmente estável** ou **estável no sentido de Lyapunov** se para toda possível condição inicial x_0 finita a resposta é limitada. É **assintoticamente estável** se para toda possível condição inicial x_0 finita a resposta é limitada e tende a zero quando $t \to \infty$.

Teorema

• A equação $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é marginalmente estável se e somente se todos os autovalores de A têm parte real igual a zero ou negativa e aqueles que têm parte real igual a zero são raízes de multiplicidade 1 do polinômio mínimo de A.

• A equação $\dot{x}(t) = Ax(t)$ é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de A têm parte real negativa.

• As transformações de equivalência não afetam a estabilidade de uma equação de estado. Definindo $\bar{x} = Px$, com P não singular, $\dot{x} = Ax$ é equivalente a $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} = PAP^{-1}\bar{x}$

• Como P é não singular, se x é limitado, então $\bar{x}$ também o é; se x tende a zero quando $t \to \infty$, o mesmo ocorre com $\bar{x}$.

• A estabilidade de A pode ser estudada através de $\bar{A}$.

A solução de $\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x}$ para $\bar{x}(0)$ é dada por $\bar{x}(t) = \exp(\bar{A}t)\bar{x}(0)$. Se $\bar{A}$ está na forma de Jordan, pode-se mostrar que:

• Se um autovalor tem parte real negativa, cada elemento do bloco de Jordan associado é limitado e tende a zero quando $t \to \infty$.

• Se um autovalor tem parte real igual a zero e nenhum bloco de Jordan de ordem 2 ou maior, então o elemento correspondente é constante ou senoidal para todo t e portanto limitado.

• Se um autovalor tem parte real positiva, cada elemento do bloco de Jordan associado cresce indefinidamente; se um autovalor tem parte real igual a zero e algum bloco de Jordan de ordem 2 ou maior, então pelo menos um elemento cresce indefinidamente.

• Para ser assintoticamente estável, todo elemento tem que tender a zero quando $t \to \infty$, e assim, nenhum autovalor com parte real 0 ou positiva é permitido.

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1) \quad \text{(polinômio característico)}$$

O polinômio mínimo é dado por $\phi(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)$ e portanto $\lambda = 0$ é uma raiz simples (multiplicidade 1) do polinômio mínimo. Os autovalores da matriz A são 0, 0 e -1 e a equação é marginalmente estável.

Já o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

não é marginalmente estável, pois seu polinômio mínimo é dado por $\phi(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1)$ e $\lambda = 0$ não é uma raiz simples do polinômio mínimo.

- Todo pólo da matriz de transferência

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

é também um autovalor de A. Assim, a estabilidade assintótica implica na BIBO estabilidade.

- A BIBO estabilidade não implica, em geral, na estabilidade assintótica.

Estabilidade Interna de Sistemas Discretos

$$x(k+1) = Ax(k)$$

Solução para $x(0) = x_0$ é dada por $x(k) = A^k x_0$.

O sistema é marginalmente estável ou estável no sentido de Lyapunov se toda condição inicial finita x_0 implicar em uma resposta limitada. É assintoticamente estável se, além disso, a resposta tende a zero quando $k \to \infty$.

Teorema

• A equação $x(k+1) = Ax(k)$ é marginalmente estável se e somente se todos os autovalores de A têm magnitudes menores ou iguais a 1 e aqueles que tiverem magnitudes iguais a 1 forem raízes simples do polinômio mínimo de A.

• A equação $x(k+1) = Ax(k)$ é assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de A têm magnitudes menores do que 1.

Assim como no caso contínuo, as transformações equivalentes não afetam a estabilidade do sistema, e as formas de Jordan podem ser usadas no estudo da estabilidade. A estabilidade assintótica implica em BIBO estabilidade mas o contrário não é verdadeiro.

Teorema de Lyapunov

Todos os autovalores de A têm parte real negativa se e somente se para qualquer matriz simétrica definida positiva N a equação de Lyapunov

$$A'M + MA = -N$$

tiver uma única solução simétrica M e M for definida positiva.

Corolário

Todos os autovalores de uma matriz A $n \times n$ têm parte real negativa se e somente se para qualquer matriz $\bar{N}$ $m \times n$ com $m < n$ tal que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{N}A \\ \vdots \\ \bar{N}A^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad \text{(rank completo de colunas)}$$

a equação de Lyapunov

$$A'M + MA = -\bar{N}'\bar{N} \triangleq -N$$

tiver uma única solução simétrica M e M for definida positiva.

- Para qualquer $\bar{N}$, a matriz $N = \bar{N}'\bar{N}$ é semidefinida positiva.
- O teorema e seu corolário são válidos para qualquer escolha de N.

Prova do Teorema

(Necessidade): a equação de Lyapunov é um caso especial da equação de Sylvester. Como A e A' têm os mesmos autovalores, se A for assintoticamente estável, não existem dois autovalores tais que

$$\lambda_i + \lambda_j = 0$$

e portanto a equação de Lyapunov é não singular e possui uma única solução M. Defina

$$M = \int_0^\infty \exp(A't) N \exp(At) dt$$

Substituindo na equação, obtém-se

$$A'M + MA = \int_0^\infty A' \exp(A't) N \exp(At) dt +$$

$$+ \int_0^\infty \exp(A't) N \exp(At) A dt \ =$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\exp(A't) N \exp(At) \right) dt = \left(\exp(A't) N \exp(At) \right) \Big|_{t=0}^{\infty}$$

$$= \mathbf{0} - N = -N$$

pois $\exp(At) = \mathbf{0}$ para $t \to \infty$ se A tem autovalores com parte real negativa. Com isso, prova-se que M dada acima é solução da equação. É claro que se N for simétrica, M também é.
Como N é não singular, pode ser decomposta na forma $N = \tilde{N}'\tilde{N}$ com $\tilde{N}$ não singular. Portanto,

$$x'Mx = \int_0^\infty x' \exp(A't) \tilde{N}'\tilde{N} \exp(At) x dt = \int_0^\infty \|\tilde{N} \exp(At) x\|_2^2 \, dt$$

que é positiva para qualquer $x \neq 0$ ($\tilde{N}$ e $\exp(At)$ são não singulares), o que mostra que M é definida positiva.

(Suficiência): Agora, mostra-se que se N e M são definidas positivas, A é estável. Seja λ um autovalor de A associado ao autovetor v. Então, $Av = \lambda v$. Pré e pós multiplicando a equação de Lyapunov por v^* e v, respectivamente, tem-se

$$-v^*Nv = v^*A'Mv + v^*MAv = (\lambda^* + \lambda)v^*Mv = 2\text{Re }(\lambda)v^*Mv$$

Como v^*Nv e v^*Mv são reais positivos $\Longrightarrow$ Re $(\lambda) < 0$.

Prova do Corolário

Segue os mesmos passos da prova do teorema. Note que $\bar{N}$ é uma matriz $m \times n$, com $m < n$, e que portanto $N = \bar{N}'\bar{N}$ é semidefinida positiva. Ainda assim, M pode ser definida positiva se o integrando $\bar{N}\exp(At)x$ não for identicamente nulo para todo t.

Por absurdo, suponha que $\bar{N}\exp(At)x \equiv 0$ para todo t. Derivando em relação ao tempo, tem-se $\bar{N}A\exp(At)x \equiv \mathbf{0}$; fazendo a derivada $n-1$ vezes:

$$\begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{N}A \\ \vdots \\ \bar{N}A^{n-1} \end{bmatrix} \exp(At)x = \mathbf{0}$$

Como por hipótese o rank da matriz acima é n e $\exp(At)$ é não singular para todo t, o único x solução seria $x = 0$. Assim, o integrando $\bar{N}\exp(At)x$ não pode ser identicamente nulo para nenhum $x \neq 0$ e M é definida positiva. Mostrou-se assim a necessidade.

Considere agora $Av = \lambda v$ e

$$2\text{Re }(\lambda) v^* M v = -v^* \bar{N}' \bar{N} v = -\|\bar{N} v\|_2^2$$

Note que $A^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v, \ldots, A^{n-1} v = \lambda^{n-1} v$. Assim,

$$\begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{N}A \\ \vdots \\ \bar{N}A^{n-1} \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} \bar{N}v \\ \bar{N}Av \\ \vdots \\ \bar{N}A^{n-1}v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}v \\ \lambda\bar{N}v \\ \vdots \\ \lambda^{n-1}\bar{N}v \end{bmatrix}$$

Com a hipótese de rank completo de colunas, o vetor da esquerda é não nulo para $v \neq 0$ e portanto $\bar{N}v$ (que compõe o vetor da direita) é um vetor não nulo.

$\Longrightarrow \quad \text{Re }(\lambda) < 0$

• Na prova do teorema de Lyapunov e do colorário, usou-se a expressão da solução M

$$M = \int_0^\infty \exp(A't) N \exp(At) dt$$

Esse resultado é estabelecido como teorema, e usado para mostrar a unicidade da solução da equação de Lyapunov.

Teorema

Se todos os autovalores de A têm parte real negativa, então a equação de Lyapunov

$$A'M + MA = -N$$

tem uma única solução para todo N dada por

$$M = \int_0^\infty \exp(A't)N\exp(At)dt$$

Prova de Unicidade

Suponha que M_1 e M_2 são soluções. Então

$$A'(M_1 - M_2) + (M_1 - M_2)A = \mathbf{0}$$

$$\exp(A't)\Big[A'(M_1 - M_2) + (M_1 - M_2)A\Big]\exp(At) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[\exp(A't)(M_1 - M_2)\exp(At)\Big] = \mathbf{0}$$

Integrando de 0 a ∞

$$\Big[\exp(A't)(M_1 - M_2)\exp(At)\Big]\Big|_0^\infty = 0$$

$$0 - (M_1 - M_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad M_1 = M_2$$

• Mesmo para A não estável, uma solução única existe se $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, mas não da forma M acima. Se A for singular (pelo menos um autovalor nulo), a equação de Lyapunov é singular e soluções podem ou não existir (dependendo se N está ou não no range da equação).

Caso Discreto

• Equação discreta

$$M - AMB = C$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Como no caso contínuo, pode ser expressa na forma (conjunto de equações lineares)

$$Ym = c \quad ; \quad Y \in \mathbb{R}^{nm\times nm} \; , \;\; m, c \in \mathbb{R}^{nm\times 1}$$

Seja η_k um autovalor de Y. Nesse caso,

$$\eta_k = 1 - \lambda_i \mu_j \quad \text{para} \;\; i = 1, 2, \ldots, n \;\; ; \;\; j = 1, 2, \ldots, m$$

com λ_i e μ_j autovalores de A e B respectivamente.

• Para verificar esse fato, defina $\mathcal{S}(M) \triangleq M - AMB$. A equação pode então ser escrita $\mathcal{S}(M) = C$ e um escalar η é um autovalor de $\mathcal{S}(M)$ se $\mathcal{S}(M) = \eta M$.

Considere u um autovetor à direita de A associado ao autovalor λ_i e v um autovetor à esquerda de B associado ao autovalor μ_j

$$Au = \lambda_i u \quad ; \quad vB = \mu_j v$$

Assim

$$\mathcal{S}(uv) = uv - AuvB = (1 - \lambda_i \mu_j) uv$$

• Se não existir i e j tais que $\lambda_i \mu_j = 1$, a equação é não singular e para cada C a solução M é única.

• Se $\lambda_i \mu_j = 1$ para algum i e j, para C dado, a solução pode ou não existir.

Teorema de Lyapunov (Caso Discreto)

Todos os autovalores de A têm magnitude menor do que 1 se e somente se para qualquer matriz definida positiva N ou para $N = \bar{N}'\bar{N}$ com $\bar{N}$ uma matriz $m \times n$ com $m < n$ tal que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{N}A \\ \vdots \\ \bar{N}A^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad \text{(rank completo de colunas)}$$

a equação discreta de Lyapunov

$$M - A'MA = N$$

tiver uma solução única M e M for definida positiva.

• Para $N > 0$, se todos os autovalores de A (iguais aos de A') têm magnitude menor que 1, $\mid \lambda_i \lambda_j \mid < 1$ para todo i, j, a equação é não singular e uma única solução existe. Considere

$$M = \sum_{m=0}^{\infty} (A')^m N A^m$$

Como $\mid \lambda_i \mid < 1$ para todo i, esta série infinita converge. Substituindo

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A')^m N A^m - A' \left(\sum_{m=0}^{\infty} (A')^m N A^m \right) A =$$

$$= N + \sum_{m=1}^{\infty} (A')^m N A^m - \sum_{m=1}^{\infty} (A')^m N A^m = N$$

e se N for simétrica, M também é. Isso mostra a necessidade.

Para mostrar a suficiência, considere λ um autovalor de A associado ao autovetor $v \neq 0$ ($Av = \lambda v$). Assim,

$$v^* N v = v^* M v - v^* A' M A v =$$
$$= v^* M v - \lambda^* v^* M v \lambda = (1- \mid \lambda \mid^2) v^* M v$$

Como os dois lados da equação são números reais e positivos, conclui-se que $(1- \mid \lambda \mid^2) > 0$ ou $\mid \lambda \mid^2 < 1$. Isso estabelece o resultado para $N > 0$. O caso $N \geq 0$ pode ser mostrado de maneira similar.

Teorema

Se todos os autovalores de A têm magnitude menor do que 1, então a equação discreta de Lyapunov

$$M - A' M A = N$$

tem uma única solução para todo N dada por

$$M = \sum_{m=0}^{\infty} (A')^m N A^m$$

• Se A tem um ou mais autovalores com magnitude maior do que 1, uma solução única ainda existe se $\lambda_i \lambda_j \neq 1$ para todo i, j, mas não pode ser computada pela série acima.

Relação entre os Casos Contínuo e Discreto

A condição de estabilidade do caso contínuo requer que todos os autovalores estejam no semi-plano esquerdo aberto do plano complexo s. A correspondente condição no caso discreto é que todos os autovalores estejam contidos no interior do círculo unitário do plano complexo z. Essas condições se relacionam pela transformação bilinear

$$s = \frac{z-1}{z+1} \quad ; \quad z = \frac{1+s}{1-s}$$

que define um mapeamento do semi-plano esquerdo aberto para o interior do círculo unitário e vice-versa.

Escrevendo as equações de Lyapunov (o subescrito d designa o caso discreto)

$$A'M + MA = -N \quad ; \quad M_d - A'_d M_d A_d = N_d$$

Usando a transformação bilinear

$$A = (A_d + \mathbf{I})^{-1}(A_d - \mathbf{I}) \quad ; \quad A_d = (\mathbf{I} + A)(\mathbf{I} - A)^{-1}$$

Substituindo e manipulando, obtém-se

$$A'M_d + M_d A = -0.5(\mathbf{I} - A')N_d(\mathbf{I} - A)$$

que, comparada com a equação de Lyapunov do caso contínuo, fornece

$$A = (A_d + \mathbf{I})^{-1}(A_d - \mathbf{I}) \;\; ; \;\; M = M_d \;\; ; \;\; N = 0.5(\mathbf{I} - A')N_d(\mathbf{I} - A)$$

- Um método numérico de resolução da equação de Lyapunov do caso contínuo pode ser usado para o caso discreto.

Funções de Lyapunov

Suponha que $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico. Uma **função de Lyapunov** para o sistema e para $\bar{x}$ é uma função real $v(x)$, definida em uma região Ω do espaço de estados que contém $\bar{x}$ e que satisfaz: i) $v(x)$ é contínua; ii) $v(x)$ possui um único mínimo na região Ω, dado por $\bar{x}$; iii) Ao longo de qualquer trajetória do sistema em Ω, o valor de $v(x)$ nunca aumenta.

• Pode-se concluir sobre a estabilidade de sistemas dinâmicos sem a necessidade de se resolver a equação diferencial que descreve o comportamento do sistema (condições suficientes);

Função quadrática de Lyapunov

A estabilidade do ponto $x = 0$ do sistema linear $\dot{x} = Ax$ pode ser investigada através da função quadrática $v(x) = x'Px$, com $P = P' > 0$. Se $v(x) > 0$ para qualquer $x \neq 0$ e $v(x) = 0$ somente para $x = 0$, e além disso $\dot{v}(x) < 0$ para todo x, então $x = 0$ é assintoticamente estável.

Portanto, a existência de $P = P' > 0$ tal que

$$\dot{v}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'A'Px + x'PAx = x'(A'P + PA)x < 0$$

garante a estabilidade assintótica de $x = 0$. No caso de sistemas lineares, a condição é necessária e suficiente. Assim, a estabilidade assintótica de uma matriz A pode ser testada através da existência de uma solução factível para as desigualdades matriciais lineares

$$P > 0$$

$$A'P + PA < 0$$