Equações Diferenciais

- Sistemas lineares invariantes no tempo podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes. Em geral, a ordem da equação está associada ao número de armazenadores de energia.

Sistema Autônomo

- Equação de Primeira Ordem: $x + \tau\dot{x} = 0$, τ é a constante de tempo

Modo próprio: $x(t) = K\exp(\lambda t)$; Equação característica: $\lambda + \dfrac{1}{\tau} = 0$

Solução: $x(t) = K\exp(-\dfrac{t}{\tau})$

- Equação de Segunda Ordem: $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

α: coeficiente de amortecimento; ω_0: freqüência natural de oscilação

Dois modos próprios do tipo: $x(t) = K\exp(\lambda t)$

Equação característica: $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$

Solução: $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$: $x(t) = K_1\exp(\lambda_1 t) + K_2\exp(\lambda_2 t)$;
$(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$: $x(t) = K_1\exp(\lambda t) + K_2 t\exp(\lambda t)$

Sistemas Não Autônomos

- Método dos Coeficientes a Determinar (sistema de ordem n)

$$x(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i p_i(t)}_{\Uparrow\ \text{transitória}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{m} b_j f_j(t)}_{\Uparrow\ \text{forçada}}$$

A solução é uma combinação linear dos n modos próprios $p_i(t)$ e das $m+1$ derivadas linearmente independentes $f_j(t)$ da entrada (por definição, $f_0(t) = f(t)$).

Os coeficientes b_j são calculados substituindo-se o termo "forçado" na equação, e os coeficientes c_i são determinados ajustando-se a solução às condições iniciais.

Modos Próprios: Conjunto de n funções linearmente independentes que constituem uma base para a solução da equação homogênea de um sistema linear com n armazenadores de energia.

• Sistematização

1) Calcular os modos próprios (raízes da equação característica).

2) Substituir a componente forçada na equação para obter os seus coeficientes.

3) Com as condições iniciais, obter os demais coeficientes.

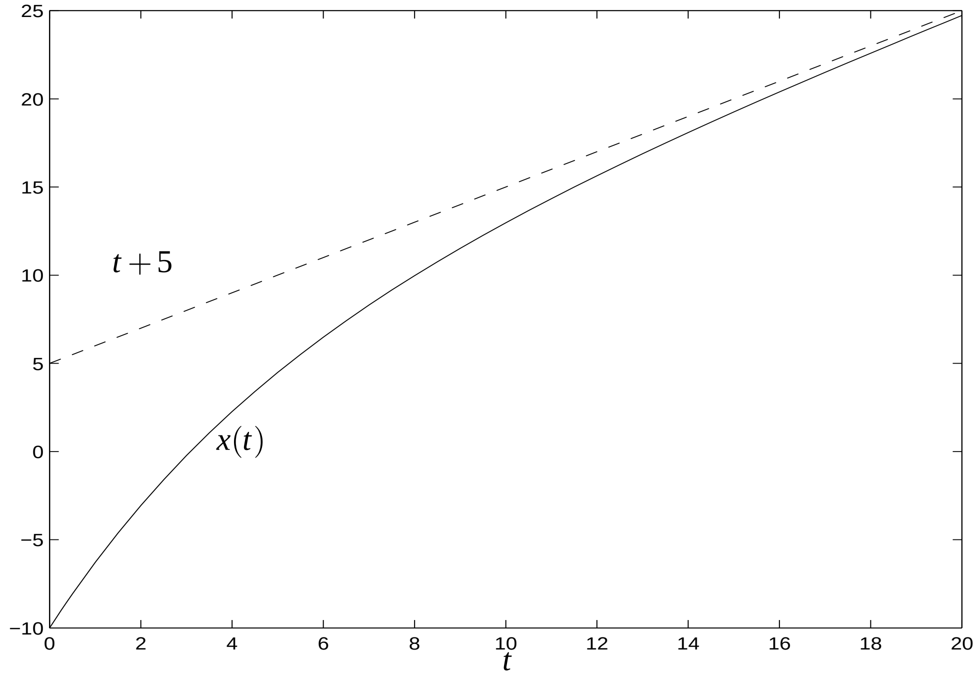
Exemplo: $x + 5\dot{x} = t + 10;\ x(0) = -10$

$$5\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -0.2$$

$$x_f = k_1 t + k \implies k_1 t + k + 5k_1 = t + 10; k_1 = 1; k = 5 \implies x_f = t + 5$$

$$x(t) = k_0 \exp(-0.2t) + t + 5; x(0) = -10 \implies k_0 = -15$$

Portanto: $x(t) = -15\exp(-0.2t) + t + 5$



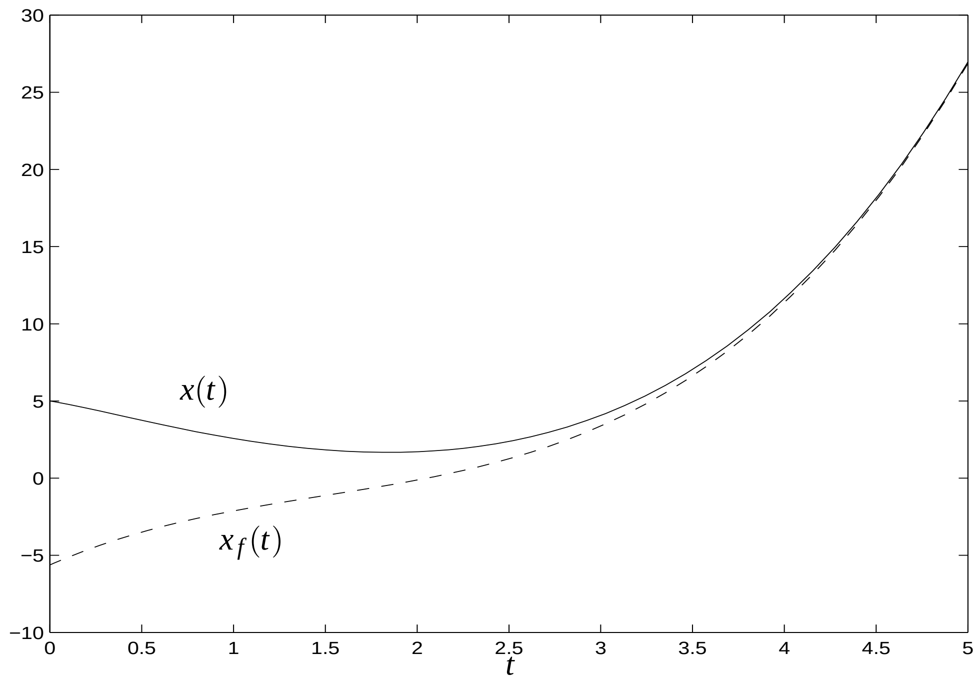
Exemplo: $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=t^3$; $x(0)=5$, $\dot{x}(0)=-2$

$$\lambda^2+3\lambda+2=0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1=-1\ ,\quad \lambda_2=-2$$

$$x_f=k_3t^3+k_2t^2+k_1t+k \Longrightarrow \ k_3=0.5\ ,\ k_2=-2.25\ ,\ k_1=5.25\ ,\ k=-5.625$$

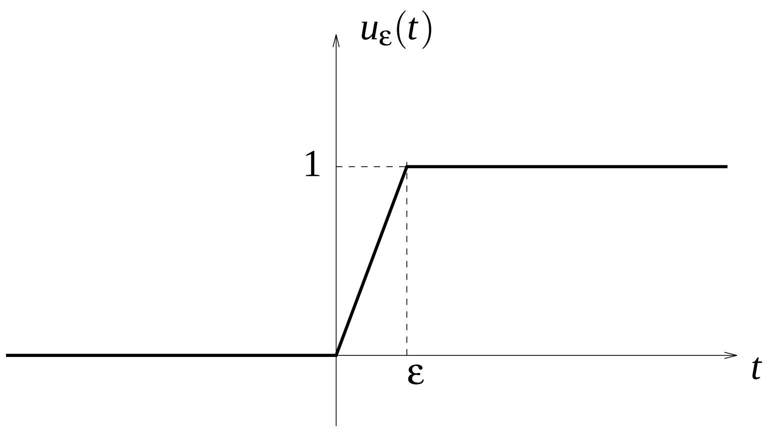
$$x(t)=a_1\exp(-t)+a_2\exp(-2t)+0.5t^3-2.25t^2+5.25t-5.625$$

$$x(0)=5\ ,\quad \dot{x}(0)=-2 \quad \Longrightarrow \quad a_1=14\ ;\quad a_2=-3.375$$



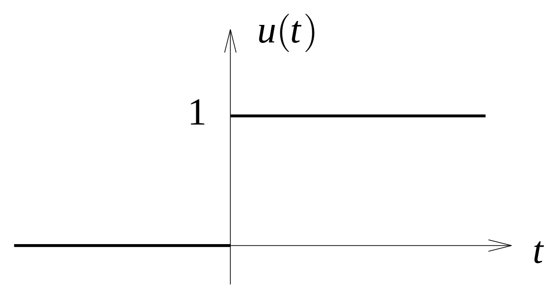
Função Degrau Unitário $u(t)$

- Definição: $u_\varepsilon(t)$



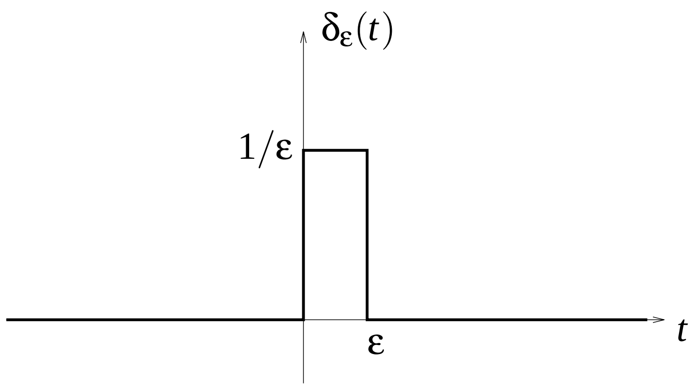
$$u_\varepsilon(t) \triangleq \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ (1/\varepsilon)t & , \quad 0 < t < \varepsilon \\ 1 & , \quad t > \varepsilon \end{cases}$$

$$u(t) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0^+} u_\varepsilon(t)$$

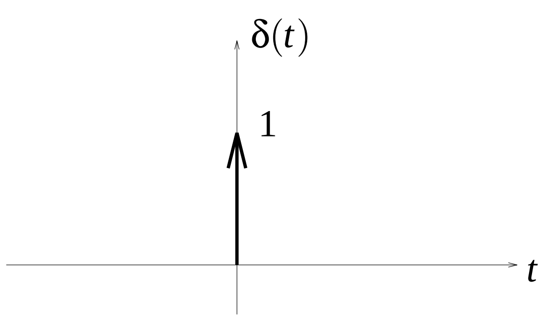


Função Impulso Unitário $\delta(t)$

- Definição: $\delta_\varepsilon(t)$



$$\delta_\varepsilon(t) \triangleq \frac{d}{dt}u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 \quad , & t < 0 \\ 1/\varepsilon \ , & 0 < t < \varepsilon \\ 0 \quad , & t > \varepsilon \end{cases}$$



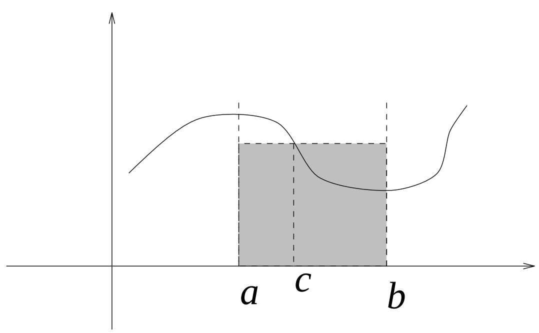
$$\delta(t) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \delta_\varepsilon(t) \qquad \delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

- Propriedade: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt \;=\; f(0) \;\;,\;\; \forall \;\; f(t)$ contínua em $t = 0$

Prova:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_\varepsilon(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} f(t)dt$$

Teorema do Valor Médio: $\int_a^b f(t)dt = f(c)(b-a) \;\;,\;\; c \in (a,b)$



$$\Longrightarrow \quad I = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} f(y)(\varepsilon - 0) \;\;,\;\; y \in (0,\varepsilon)$$

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ y \in (0,\varepsilon)}} f(y) = f(0)$$

$f(\cdot) \Longrightarrow$ Função Contínua $\Longrightarrow f(0^-) = f(0) = f(0^+)$

- **Resumo:** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt \;=\; f(0)\;,\;\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt \;=\; f(a)$

- **Corolário:** para $f(t)=1$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt \;=\; 1 \Longrightarrow$ Área Unitária

- Propriedade: $\delta(t)$ é uma "função" par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(-t)dt \;=\; f(0)$$

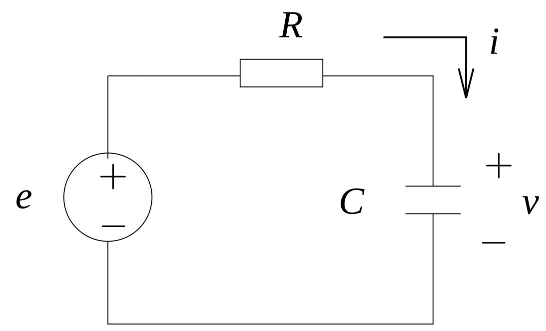
fazendo $\zeta = -t$,

$$= \;-\int_{+\infty}^{-\infty} f(-\zeta)\delta(\zeta)d\zeta \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(-\zeta)\delta(\zeta)d\zeta \;=$$

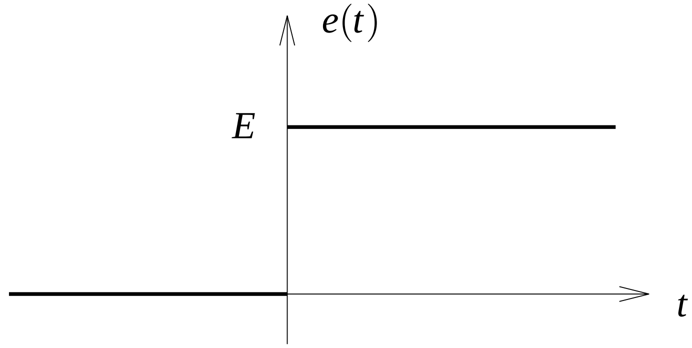
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)\delta(t)dt \;=\; f(-0) = f(0)$$

pois $f(\cdot)$ é contínua. $\Longrightarrow \qquad \delta(-t) = \delta(t)$

• Entrada em Degrau



$$e(t) = Eu(t) = \begin{cases} E & , \ t > 0 \\ 0 & , \ t < 0 \end{cases}$$



Como a função degrau vale **zero** no intervalo $(-\infty, 0)$, e o circuito é dissipativo, a tensão no capacitor em $t = 0$ é **nula**.

Assim, a resposta à entrada em degrau pode ser estudada a partir da resposta a uma entrada constante E com condições iniciais nulas.

Método dos coeficientes a determinar

$$v_f(t) = AE \quad , \quad t > 0$$

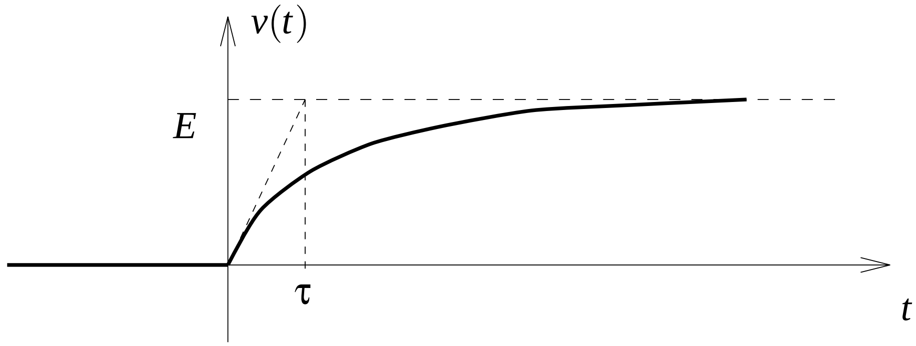
$$v_f + \tau \dot{v}_f = e \quad \Longrightarrow \quad AE = E \quad \Longrightarrow \quad A = 1$$

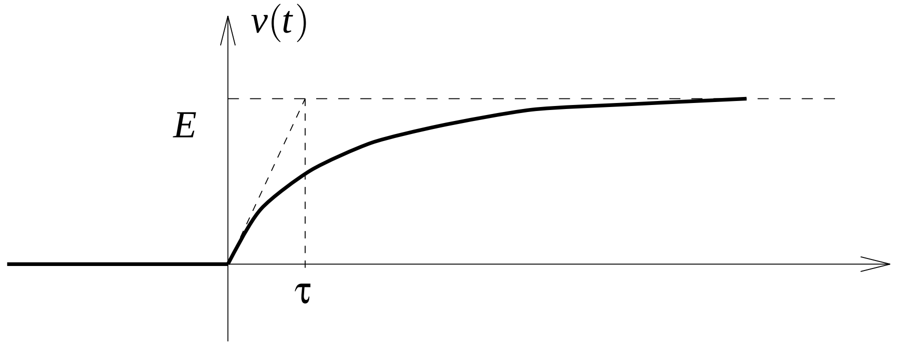
$$v(t) = K \exp(-\frac{t}{\tau}) + E$$

$$v(0) = 0, \quad \Longrightarrow \quad K = -E,$$

$$v(t) = E\left[1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right] \ , \ t > 0 \quad \text{e} \quad v(t) = 0 \ , \ t < 0$$

$$v(t) = E\left[1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right] u(t)$$





$$\frac{dv}{dt} = \frac{E}{\tau}\exp(-\frac{t}{\tau})u(t) + E\left[1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right]\delta(t)$$

Dado o caráter amostrador do impulso, só interessa o valor da função que o multiplica em $t = 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt \;=\; f(0)$$

Como $E\left[1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right] = 0$ para $t = 0$: $\frac{dv}{dt} = \frac{E}{\tau}\exp(-\frac{t}{\tau})u(t)$

Em $t = 0^+$, $\frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{E}{\tau}$

• **Resposta ao Impulso** $\triangleq h(t)$: (Entrada $e(t) = \delta(t)$)
$\Longrightarrow$ Condições Iniciais Nulas ($v(0) = 0$)

$$\delta(t) \triangleq \frac{d}{dt}u(t) \quad ; \quad h(t) = \frac{d}{dt}[\text{ resposta ao degrau }]$$

Pois

$$\left.\begin{array}{l} h(t) + \tau\dot{h}(t) = \delta(t) \\ \\ v(t) + \tau\dot{v}(t) = u(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad h(t) = \dot{v}(t)$$

$$\Longrightarrow \quad h(t) = \frac{d}{dt}\left\{\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]u(t)\right\}$$

$$h(t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)u(t) + \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]\delta(t)$$

Em $t = 0$, $\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] = 0$; $\quad h(t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)u(t)$

Transformada de Laplace

- $f(t)$ função no tempo, **nula** para $t < 0$

$$F(s) \triangleq \int_0^{\infty} f(t)\exp(-st)dt$$

$s \triangleq \sigma + j\omega$: freqüência complexa

Notação: $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

Pode ser aplicada na solução de equações integro-diferenciais com coeficientes constantes:

- Torna algébricas as equações diferenciais.
- Simplifica o cálculo da resposta impulsiva.

Seja $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ ($v(t)$ vale zero para $t < 0$)

- $\mathcal{L}[\dot{v}(t)] = sV(s) - v(0)$
- $\mathcal{L}[\ddot{v}(t)] = s^2V(s) - sv(0) - \dot{v}(0)$

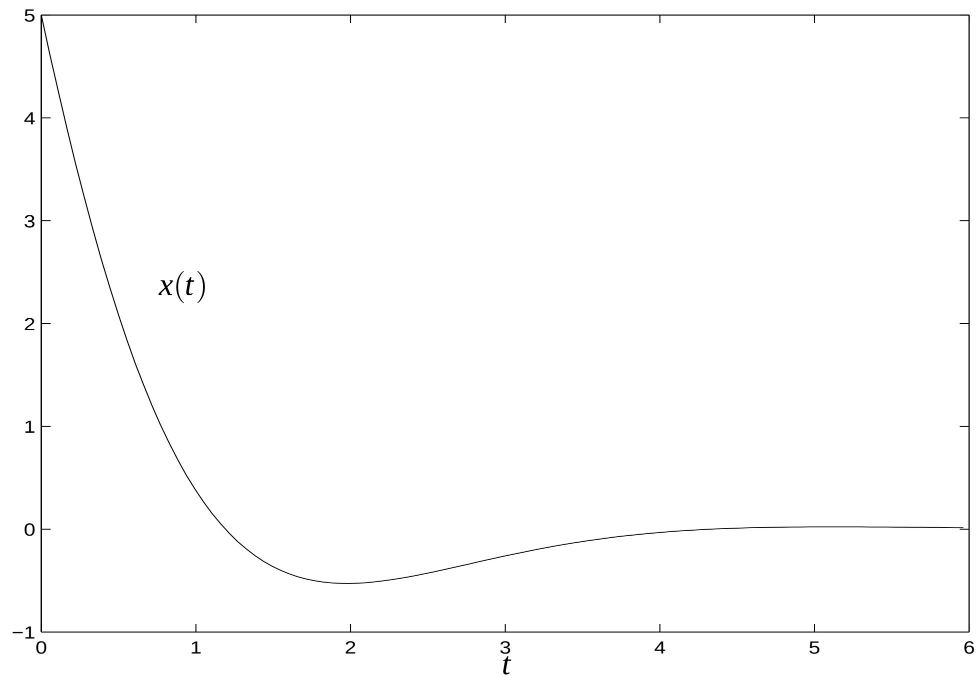
Exemplo: $\ddot{x}+2\dot{x}+2x=0 \quad ; \quad x(0)=5\ , \quad \dot{x}(0)=-2$

$$(s^2+2s+2)X(s)=(s+2)x(0)+\dot{x}(0) \quad \Longrightarrow \quad X(s)=\frac{5(s+2)}{s^2+2s+2}+\frac{-2}{s^2+2s+2}$$

Frações Parciais: $X(s)=\dfrac{2.5-j2.5}{s+1-j}+\dfrac{2.5+j2.5}{s+1+j}+\dfrac{j}{s+1-j}+\dfrac{-j}{s+1+j}$

$$x(t)=(2.5-j1.5)\exp[(-1+j)t]+(2.5+j1.5)\exp[(-1-j)t]$$

$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)];$

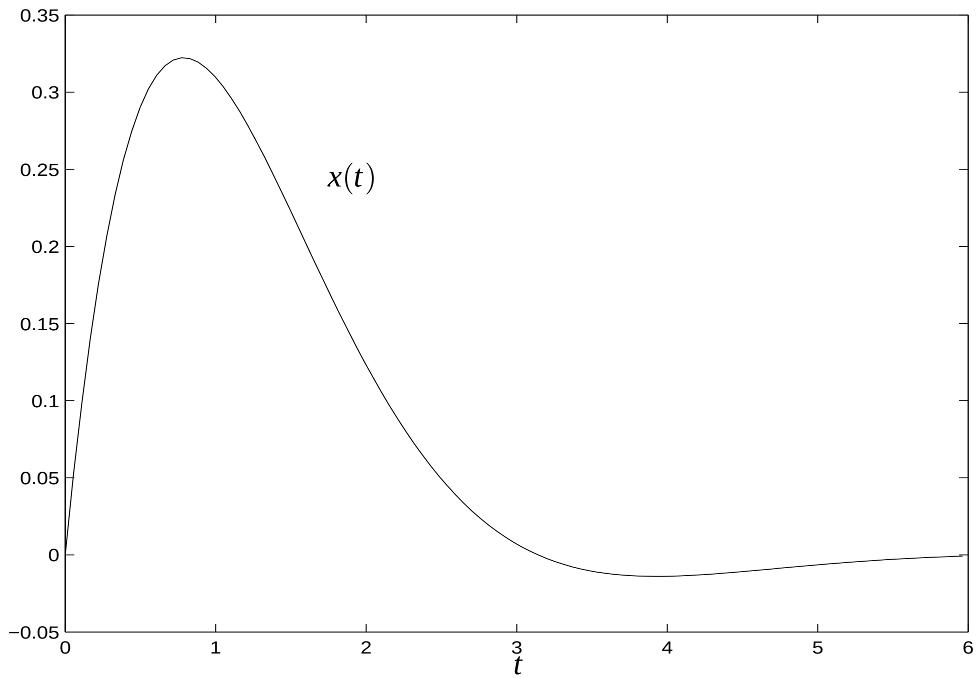


Exemplo (resposta ao impulso): $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \delta(t) \quad ; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$(s^2 + 2s + 2)X(s) = 1 \quad ; \quad X(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \quad ; \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

Frações Parciais: $X(s) = \dfrac{-j0.5}{s+1-j} + \dfrac{j0.5}{s+1+j}$

$$x(t) = -j0.5\exp[(-1+j)t] + j0.5\exp[(-1-j)t]$$



Expansão em Frações Parciais

Objetivo: facilitar o cálculo da Transformada Inversa de Laplace.

Seja a função racional em s descrita por $\dfrac{N(s)}{D(s)}$

Caso 1: Grau de $N(s)$ $<$ Grau de $D(s)$

a) $D(s)$ não tem raízes múltiplas.

$$\frac{s+1}{s^3+s^2-6s} = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3}$$

$$A = s\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s\,=\,0} = -\frac{1}{6}$$

$$B = (s-2)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s\,=\,2} = \frac{3}{10}$$

$$C = (s+3)\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s\,=\,-3} = -\frac{2}{15}$$

- Alternativamente, é possível usar identidade polinomial para o cálculo das constantes a determinar.

b) $D(s)$ com raízes múltiplas.

$$\frac{s+1}{s(s-2)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-2)} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3}$$

$$A = s\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s\,=\,0} = -\frac{1}{8} \quad ; \quad D = (s-2)^3\,\frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s\,=\,2} = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{d}{ds}\left[(s-2)^3\frac{N(s)}{D(s)}\right]\bigg|_{s\,=\,2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+1}{s}\right]\bigg|_{s\,=\,2} = \frac{-1}{s^2}\bigg|_{s\,=\,2} = \frac{-1}{4}$$

pois $\displaystyle \frac{d}{ds}\left[\frac{A(s-2)^3}{s} + B(s-2)^2 + C(s-2) + D\right]\bigg|_{s\,=\,2} = C$

$$2B = \frac{d^2}{ds^2}\left[(s-2)^3\frac{N(s)}{D(s)}\right]\bigg|_{s\,=\,2} = \frac{2}{s^3}\bigg|_{s\,=\,2} = \frac{1}{4}$$

pois $\displaystyle \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{A(s-2)^3}{s} + B(s-2)^2 + C(s-2) + D\right]\bigg|_{s\,=\,2} = 2B$

Caso 2: Grau de $N(s) \geq$ Grau $D(s)$

Reduzir ao caso anterior através de Divisão de Polinômios.

$$\frac{(s+2)^3}{(s+1)} = As^2 + Bs + C + \frac{D}{s+1} = \frac{s^3+6s^2+12s+8}{s+1}$$

$$\begin{array}{rl}
s^3+6s^2+12s+8 & \underline{/\ s+1} \\
s^3+\ s^2 & s^2+5s+7 \\
\hline
5s^2+12s+8 & \\
5s^2+5s & \\
\hline
7s+8 & \\
7s+7 & \\
\hline
+\ 1 &
\end{array}$$

$$\frac{(s+2)^3}{s+1} = s^2+5s+7+\frac{1}{s+1}$$

Tabela de Transformadas de Laplace

Função no Tempo	Transformada
$f(t)u(t)$	$F(s) \triangleq \int_0^{+\infty} f(t)\exp(-st)dt$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t)$	s^n
$u(t)$; $\dfrac{t^n}{n!}u(t)$	$1/s$; $\dfrac{1}{s^{n+1}}$
$\exp(-at)u(t)$; $\dfrac{t^n}{n!}\exp(-at)u(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$; $\dfrac{1}{(s+a)^{n+1}}$
$\cos(\omega t)u(t)$; $\sin(\omega t)u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$; $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\exp(-at)\cos(\omega t)u(t)$; $\exp(-at)\sin(\omega t)u(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$; $\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

Obs. A multiplicação de uma função $f(t)$ por $u(t)$ (degrau unitário) indica que $f(t) = 0$ para $t < 0$.

Equação a Diferenças

- Primeira ordem: $x(k+1) = \rho x(k) \quad , \quad x(0) = 1$

$$x(k) = A\lambda^k \implies A\lambda^{k+1} = A\rho\lambda^k \implies \lambda = \rho$$

$$x(0) = 1 \implies x(k) = \rho^k$$

- Segunda ordem: $x(k+2) + 3x(k+1) + 2x(k) = 0 \quad ; \quad x(0) = 1 \; , \; x(1) = 2$

$$x(k) = A\lambda^k \quad \text{modo próprio}$$

$$\implies A\lambda^k(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0 \; ; \; \lambda_1 = -1 \; , \; \lambda_2 = -2$$

$$x(k) = A_1(-1)^k + A_2(-2)^k \quad ; \quad A_1 = 4 \; , \; A_2 = -3$$

$$x(k) = \{1, 2, -8, 20, -44, 92, \ldots\} \quad \text{seqüência}$$

- Coeficientes a determinar
- Transformada Z