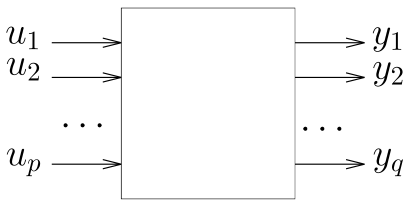
Descrição Matemática de Sistemas

São considerados sistemas tendo entradas e saídas como na figura acima; assume-se que para uma certa excitação (entrada) uma **única** resposta (saída) é obtida.

- 1 entrada/1 saída: monovariável ou SISO
  (Single input - single output)
- +1 entrada/+1 saída: multivariável ou MIMO
  (Multiple input - multiple output)



$$u' = \left[\ u_1 \ \ u_2 \ \ \cdots \ \ u_p\ \right] \quad ; \quad y' = \left[\ y_1 \ \ y_2 \ \ \cdots \ \ y_q\ \right]$$

- Sistemas Contínuos no Tempo

$u = u(t) \quad ; \quad y = y(t) \quad :$ funções do tempo $\quad t \in (-\infty, \infty)$

- Sistemas Discretos no Tempo

$u = u(k) \quad ; \quad y = y(k) \quad :$ seqüências $\quad k \in \mathbb{Z}$

Sistema sem Memória

• Um sistema é instantâneo ou sem memória se a saída do sistema $y(t_1)$ depende apenas da entrada no instante t_1 (não depende do que ocorreu antes de t_1 nem do que ocorrerá depois).

Exemplo: circuito composto apenas por resistores

Sistema Causal

• Um sistema é causal ou não antecipativo se a saída do sistema no instante t depende das entradas passadas e da entrada no instante t (mas não depende de entradas aplicadas após o instante t).

Um sistema não causal pode prever ou antecipar os sinais futuros (nenhum sistema físico tem essa capacidade). A causalidade é uma condição necessária para um sistema existir ou ser implementado.

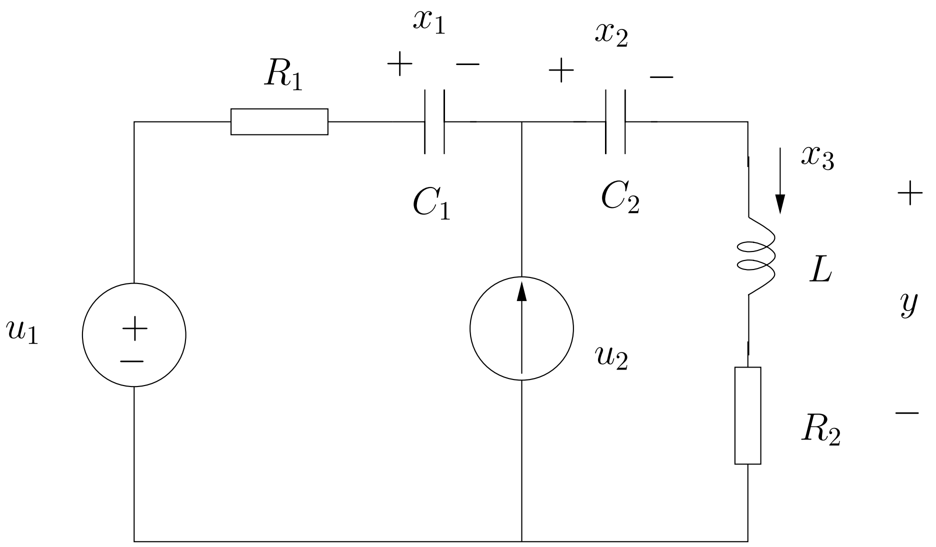
Definição: O estado $x(t_0)$ de um sistema no instante t_0 é a quantidade de informação em t_0 que junto com $u(t)$, $t \geq t_0$ determina de maneira única a saída $y(t)$ do sistema para todo $t \geq t_0$.

De certa forma, o estado resume a informação do passado que afeta as saídas futuras.

Conhecendo o estado $x(t_0)$:

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t), t \geq t_0 \end{array}\right\} \rightarrow y(t),\ t \geq t_0$$

Exemplo



Conhecendo-se as tensões nos capacitores $x_1(t_0)$ e $x_2(t_0)$ e a corrente no indutor $x_3(t_0)$, para qualquer entrada $u(t)$ aplicada a partir de t_0 a saída $y(t)$ é unicamente determinada para $t \geq t_0$.

- Estado do Circuito

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ x_3(t_0) \end{bmatrix}$$

x: variável de estado

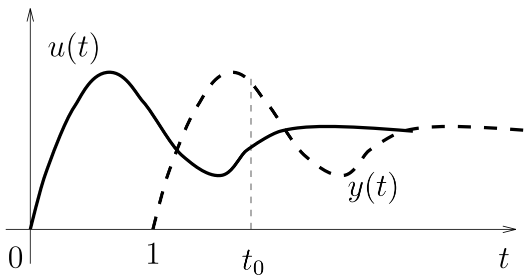
Sistema com parâmetros concentrados (numero finito de variáveis de estado)

Sistema com parâmetros distribuídos (numero infinito de variáveis de estado)

Sistemas com parâmetros distribuídos

- Linhas de transmissão
- Sistema atraso unitário

$$y(t) = u(t-1)$$



Estado: $\{u(t), t_0 - 1 \leq t < t_0\}$ (infinitos pontos)

Sistemas Lineares

Para quaisquer dois pares $i = 1, 2$ de entradas e condições iniciais

$$\left.\begin{array}{l} x_i(t_0) \\ u_i(t), t \geq t_0 \end{array}\right\} \rightarrow y_i(t), \ t \geq t_0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t_0) + x_2(t_0) \\ u_1(t) + u_2(t), t \geq t_0 \end{array}\right\} \rightarrow y_1(t) + y_2(t), \ t \geq t_0 \quad \text{aditividade}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x_i(t_0) \\ \alpha u_i(t), t \geq t_0 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha y_i(t), \ t \geq t_0 \quad ; \quad i = 1, 2 \quad \text{homogeneidade}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x_1(t_0) + \alpha_2 x_2(t_0) \\ \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t), t \geq t_0 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), \ t \geq t_0 \quad \text{superposição}$$

Sistema não linear: a superposição não se aplica

Sistemas Lineares

Se $u(t) \equiv \mathbf{0}$, $t \geq t_0$: resposta à entrada nula

Se $x(t_0) = 0$: resposta ao estado nulo

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t) \equiv \mathbf{0}, t \geq t_0 \end{array}\right\} \rightarrow y_{\text{ent. nula}}(t),\ t \geq t_0$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) = 0 \\ u(t), t \geq t_0 \end{array}\right\} \rightarrow y_{\text{est. nulo}}(t),\ t \geq t_0$$

Descrição Entrada-Saída

• assume que antes da aplicação de qualquer entrada o sistema está relaxado ou em repouso

• a saída do sistema é influenciada apenas e unicamente pela entrada aplicada após o instante de referência

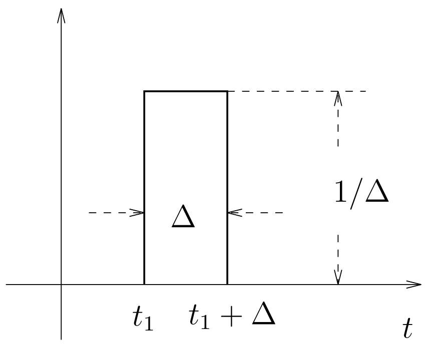
$$\{u_i \rightarrow y_i\}$$

Sistemas Lineares: para quaisquer α e u_i, $i = 1, 2$:

$$\{u_1 + u_2 \rightarrow y_1 + y_2\} \quad ; \quad \{\alpha u_i \rightarrow \alpha y_i\}$$

Sistemas SISO — Função Impulso

- Função Pulso



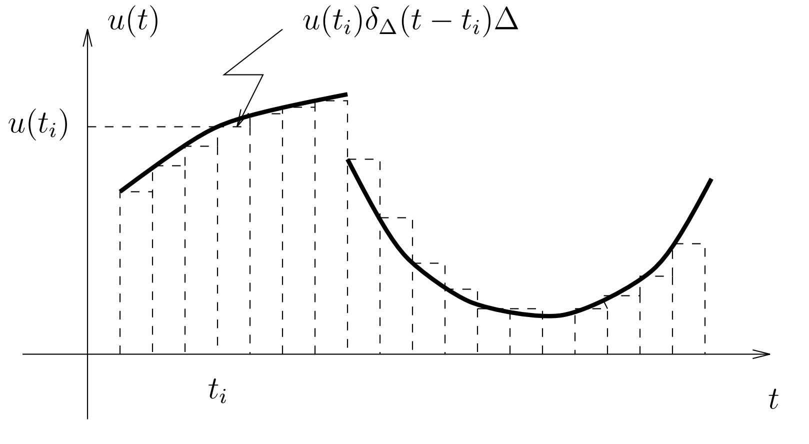
$$\delta_\Delta(t-t_1) = \begin{cases} 0 & , \ t < t_1 \\ 1/\Delta & , \ t_1 \leq t < t_1 + \Delta \\ 0 & , \ t \geq t_1 + \Delta \end{cases}$$

$$\delta(t-t_1) \triangleq \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t-t_1) \quad : \text{ função impulso ou Delta de Dirac}$$

- Propriedades

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_1)dt = \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} \delta(t-t_1)dt = 1 \quad , \quad \forall\ \epsilon > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_1)dt = f(t_1) \quad , \quad \forall\ f(t) \ \text{ contínua em } t_1$$



$$u(t) \cong \sum_i u(t_i)\delta_\Delta(t-t_i)\Delta$$

Sistemas Lineares

Considere $g_\delta(t, t_i)$ a saída no instante t do sistema excitado pelo pulso $u(t) = \delta_\Delta(t - t_i)$ aplicado no instante t_i. Então

$$\delta_\Delta(t - t_i) \rightarrow g_\delta(t, t_i)$$

$$\delta_\Delta(t - t_i)u(t_i)\Delta \rightarrow g_\delta(t, t_i)u(t_i)\Delta \quad \text{(homogeneidade)}$$

$$\sum_i \delta_\Delta(t - t_i)u(t_i)\Delta \rightarrow \sum_i g_\delta(t, t_i)u(t_i)\Delta \quad \text{(aditividade)}$$

Quando $\Delta \rightarrow 0$ o puldo $\delta_\Delta(t - t_i)$ tende ao impulso aplicado em t_i, denotado $\delta(t - t_i)$, e a saída correspondente é dada por $g(t, t_i)$

Resposta ao Impulso

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \tau)u(\tau)d\tau$$

- Sistema Causal $\iff$ $g(t, \tau) = 0$ para $t < \tau$
- Sistema Relaxado em t_0 $\iff$ $x(t_0) = 0$

Sistemas causais e relaxados em t_0

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t, \tau)u(\tau)d\tau$$

Sistema MIMO

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

$$G_{q\times p}(t,\tau) = \begin{bmatrix} g_{11}(t,\tau) & g_{12}(t,\tau) & \cdots & g_{1p}(t,\tau) \\ g_{21}(t,\tau) & g_{22}(t,\tau) & \cdots & g_{2p}(t,\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{q1}(t,\tau) & g_{q2}(t,\tau) & \cdots & g_{qp}(t,\tau) \end{bmatrix}$$

Sistema com p entradas e q saídas

$g_{ij}(t,\tau)$: resposta no instante t na i-ésima saída devida ao impulso aplicado no instante τ na entrada j

$G(\cdot,\tau)$: matriz de resposta ao impulso

Descrição no Espaço de Estados

- Qualquer sistema linear com parâmetros concentrados pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Equações Dinâmicas Não Lineares

$$\begin{array}{rcll} \dot{x}(t) & = & h(x(t), u(t), t) & \text{Equação de Estado} \\ y(t) & = & g(x(t), u(t), t) & \text{Equação de Saída} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t) \\ \dot{x}_2(t) & = & h_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t) \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_n(t) & = & h_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} y_1(t) & = & g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t) \\ y_2(t) & = & g_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_q(t) & = & g_q(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t), t) \end{array}$$

$x(t)$: estado ; $u(t)$: controle ; $y(t)$: saída

Se $h_i(\cdot)$ e $\dfrac{dh_i}{dx_j}$ são funções contínuas para todo t e $i, j = 1, 2, \dots, n$, a equação de estados possui solução única para quaisquer $x(t_0)$ e $u(t)$, $t \geq t_0$ dados.

$$\begin{array}{ccc} \text{Entrada} & & \text{Saída} \\ \{u(t), t \geq t_0; x(t_0)\} & \rightarrow & \{x(t); y(t), t \geq t_0\} \end{array}$$

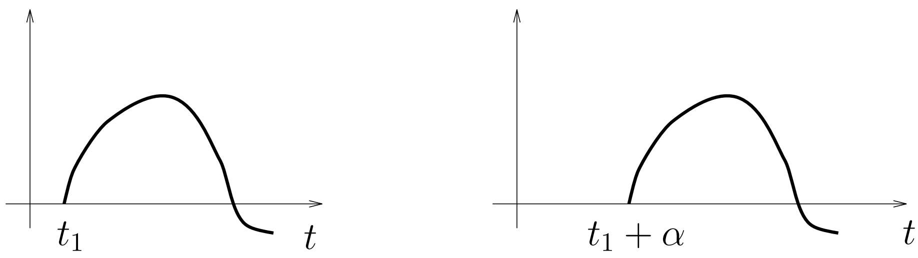
Um par entrada-saída é **admissível** se o sistema é capaz de gerar $x(t)$, $y(t)$, $t \geq t_0$, dados $x(t_0)$, $u(t)$, $t \geq t_0$.

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) \\ u(t), t \geq t_0 \end{array}\right\} \rightarrow y(t),\ t \geq t_0$$

Para qualquer T

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0+T) \\ u(t-T), t \geq t_0+T \end{array}\right\} \rightarrow y(t{-}T),\ t \geq t_0 \ \text{(deslocamento no tempo)}$$



se a entrada é deslocada de α, a saída também será deslocada de α; a forma da saída não se altera.

Descrição Entrada-Saída

$$g(t,\tau) = g(t+T, \tau+T) = g(t-\tau, 0) = g(t-\tau)$$

Integral de Convolução

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$g(t)$: resposta ao impulso aplicado em $t = 0$

Sistema causal invariante no tempo: $g(t) = 0$ para $t < 0$

Matriz Função de Transferência

Transformada de Laplace

$$Y(s) \triangleq \mathcal{L}[y(t)] = \int_0^\infty y(t)\exp(-st)dt$$

• integrais de convolução são substituídas por equações algébricas

$$Y(s) = \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty G(t-\tau)u(\tau)d\tau\Big)\exp(-st)dt$$

$$= \int_0^\infty \Big(\int_0^\infty G(t-\tau)\exp[-s(t-\tau)]dt\Big)u(\tau)\exp(-s\tau)d\tau$$

$$= \int_0^\infty G(v)\exp(-sv)dv \int_0^\infty u(\tau)\exp(-s\tau)d\tau$$

$$\triangleq \; G(s)U(s)$$

$G(s)$: Transformada de Laplace de $G(t)$ (Matriz resposta ao impulso)

• Se $p = q = 1$ (SISO) $\quad\rightarrow\quad$ Função de Transferência

• Exige que o sistema esteja relaxado em $t = 0$

• Nem sempre é uma função racional em s (apenas funções racionais em s serão estudadas neste curso)

$$\mathcal{L}[\delta(t-T)] = \exp(-sT)$$

Transformada de Laplace

- Propriedades
  - $\mathcal{L}[Kf(t)] = KF(s) \quad , \quad K$ constante
  - $\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
  - $\mathcal{L}[\frac{d}{dt}f(t)] = sF(s) - f(0)$
  - $\mathcal{L}[\exp(-at)f(t)] = F(s+a) \quad , \quad a$ constante

- Alguns Pares $f(t) \quad \leftrightarrow \quad F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

$$\delta(t) \quad \leftrightarrow \quad 1$$

$$u(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s} \qquad , \quad u(t) \text{ função degrau}$$

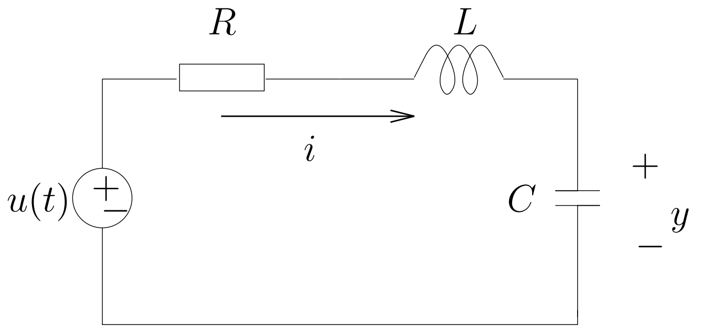
$$Ku(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{K}{s} \quad , \quad K \text{ constante}$$

$$Ktu(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{K}{s^2} \quad , \quad K \text{ constante}$$

$$\sin(\omega t)u(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\exp(-at)u(t) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{s+a} \quad , \quad a \text{ constante}$$

Exemplo: Circuito RLC série



$$Ri + L\frac{di}{dt} + y = u(t) \quad , \quad i = C\frac{dy}{dt}$$

Com condições iniciais nulas ($y(0) = \dot{y}(0) = 0$)

$$LCs^2Y(s) + RCsY(s) + Y(s) = U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$R = 3\Omega \;\; ; \;\; L = 1H \;\; ; \;\; C = 0.5F$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+2)} = G(s)$$

Resposta ao Impulso:

$$g(t) = 2\exp(-t) - 2\exp(-2t) \quad , \quad t \geq 0$$

Para uma entrada qualquer,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t_0} g(t-\tau)u(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad , \quad t \geq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{t_0} g(t-\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$2\exp(-t)\int_{-\infty}^{t_0} \exp(\tau)u(\tau)d\tau - 2\exp(-2t)\int_{-\infty}^{t_0} \exp(2\tau)u(\tau)d\tau$$
$$= 2\exp(-t)c_1 - 2\exp(-2t)c_2 \quad , \quad t \geq t_0$$

Determinação de c_1 e c_2

$$y(t_0) = 2\exp(-t_0)c_1 - 2\exp(-2t_0)c_2$$

$$\dot{y}(t_0) = -2\exp(-t_0)c_1 + 4\exp(-2t_0)c_2$$

Se $y(t_0)$ (tensão no capacitor) e $C\dot{y}(t_0)$ (corrente no indutor) forem conhecidas, então a saída pode ser unicamente determinada para $t \geq t_0$ mesmo que o sistema não esteja relaxado em t_0.

$$\{y(t_0), \dot{y}(t_0)\} \quad , \quad \{c_1, c_2\} \qquad \rightarrow \quad \text{Estado do Circuito em } t_0$$

Note que a informação (estado) necessária para determinar unicamente a resposta do sistema não é única, e que pode haver redundância.

O estado não necessariamente tem interpretação física nem precisa ser representado por um número finito de valores.

Funções Racionais em s

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$: polinômio numerador ; $D(s)$: polinômio denominador

- $G(s)$ estritamente própria
  $\Leftrightarrow$ grau de $D(s) >$ grau de $N(s) \Leftrightarrow G(\infty) = 0$

- $G(s)$ biprópria
  $\Leftrightarrow$ grau de $D(s) =$ grau de $N(s) \Leftrightarrow G(\infty) =$ constante $\neq 0$

- $G(s)$ imprópria
  $\Leftrightarrow$ grau de $D(s) <$ grau de $N(s) \Leftrightarrow \mid G(\infty) \mid = \infty$

- $p \in \mathbb{C}$ é um **pólo** de $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ se $\mid G(p) \mid = \infty$

- $z \in \mathbb{C}$ é um **zero** de $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ se $\mid G(z) \mid = 0$

Se $D(s)$ e $N(s)$ são **coprimos** (isto é, não possuem fatores comuns de grau 1 ou maior), todas as raízes de $N(s)$ são zeros de $G(s)$ e todas as raízes de $D(s)$ são pólos de $G(s)$.

$$G(s) = k\frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)}$$

Matriz racional $G(s)$

Própria: $G(\infty)$ constante; Estritamente Própria: $G(\infty) = \mathbf{0}$;
Biprópria: $G(s)$ quadrada, $G(s)$ e $G(s)^{-1}$ próprias.

Sistema Dinâmico Linear Invariante no Tempo

Equação no Espaço de Estados

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

p entradas, q saídas e n estados

A $(n \times n)$, B $(n \times p)$, C $(q \times n)$ e D $(q \times p)$

Transformada de Laplace

$$X(s) = (s\mathbf{I} - A)^{-1}x(0) + (s\mathbf{I} - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}x(0) + C(s\mathbf{I} - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

Dados $x(0)$ e $U(s)$, pode-se computar algebricamente $X(s)$ e $Y(s)$. A transformada inversa de Laplace fornece $x(t)$ e $y(t)$.

Note as duas parcelas da resposta de um sistema linear: resposta ao estado inicial nulo e resposta à entrada nula.

Se $x(0) = 0$

$$Y(s) = [C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D]U(s) = G(s)U(s)$$

• Recomenda-se o uso de Matlab e Simulink para descrever sistemas, simular (para várias condições iniciais e entradas), passar de uma representação à outra, etc.