Controlabilidade e Observabilidade: Formas de Jordan

$$\dot{x} = Jx + Bu$$

$$y = Cx$$

J : matriz na forma de Jordan

Assumindo que J tem os autovalores distintos λ_1 e λ_2

$$J = \text{diag}\,(J_1, J_2)$$

J_1 : todos os blocos de Jordan associados com λ_1

J_2 : todos os blocos de Jordan associados com λ_2

Por exemplo:

$$J_1 = \text{diag}\,(J_{11}, J_{12}, J_{13}) \quad ; \quad J_2 = \text{diag}\,(J_{21}, J_{22})$$

b_{lij} : linha de B correspondendo à última linha de J_{ij}

c_{fij} : coluna de C correspondendo à primeira coluna de J_{ij}

Teorema

• O sistema é controlável se e somente se os três vetores linha $\{b_{l11}, b_{l12}, b_{l13}\}$ são LI e os dois vetores linha $\{b_{l21}, b_{l22}\}$ são LI.

• O sistema é observável se e somente se os três vetores coluna $\{c_{f11}, c_{f12}, c_{f13}\}$ são LI e os dois vetores coluna $\{c_{f21}, c_{f22}\}$ são LI.

Prova: análise do rank de $\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - A & B \end{bmatrix}$ nos autovalores de A.

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x$$

3 blocos de Jordan associados ao autovalor λ_1 com ordens: 2, 1 e 1

Linhas de B correspondentes às últimas linhas dos blocos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{são LI}$$

1 bloco de Jordan de ordem 3 associado a λ_2

Linha de B associada à última linha do bloco de Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{LI (não nula)}$$

$\Longrightarrow$ sistema controlável

Observabilidade: colunas associadas à primeira coluna de cada bloco

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{são LI} \qquad ; \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{não é LI}$$

$\Longrightarrow$ sistema não observável

Sistemas Monovariáveis

• Uma equação de estado mono-entrada na forma de Jordan é controlável se e somente se existir apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor distinto e todo elemento de B correspondente à última linha de cada bloco de Jordan for não nulo.

• Uma equação de estado mono-saída na forma de Jordan é observável se e somente se existir apenas um bloco de Jordan associado a cada autovalor distinto e todo elemento de C correspondente à primeira coluna de cada bloco de Jordan for não nulo.

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x$$

Dois blocos de Jordan, um de ordem 3 associado ao autovalor 0 e outro de ordem 1 associado ao -2. O elemento de B correspondente à última linha do primeiro bloco é zero $\Longrightarrow$ não controlável.

Os dois elementos de C correspondentes à primeira coluna de cada um dos blocos são não nulos $\Longrightarrow$ observável.

Sistemas Discretos no Tempo

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$

O sistema discreto acima (ou o par (A, B)) é controlável se para qualquer condição inicial $x(0) = x_0$ e qualquer estado final x_1 existir uma seqüência de entradas de tamanho finito que transfere o sistema de x_0 para x_1.

Teorema: são equivalentes

1) (A, B) é controlável.

2) A matriz $n \times n$

$$W_{dc}(n-1) = \sum_{m=0}^{n-1} (A)^m BB'(A')^m$$

é não-singular.

3) A matriz de controlabilidade $\mathfrak{C}_d = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ $(n \times np)$ tem rank n.

4) A matriz $n \times (n+p)$ $\begin{bmatrix} A - \lambda \mathbf{I} & B \end{bmatrix}$ tem rank n em todo λ.

5) Se todos os autovalores de A têm módulo menor que 1, então a solução única de

$$W_{dc} - AW_{dc}A' = BB'$$

é definida positiva (`dgram`: Gramiano discreto).

$$W_{dc} = \sum_{m=0}^{\infty} A^m BB'(A')^m$$

Solução do sistema em $t = n$ é dada por

$$x(n) = A^n x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} A^{t-1-m} B u(m)$$

e pode ser escrita

$$x(n) - A^n x(0) = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Portanto, para quaisquer $x(0)$ e $x(n)$, existe uma seqüência de entrada se e somente se a matriz de controlabilidade tiver rank completo de linhas.

A matriz $W_{dc}(n-1)$ pode ser escrita

$$W_{dc}(n-1) = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B' \\ B'A' \\ \vdots \\ B'(A')^{n-1} \end{bmatrix}$$

Note que $W_{dc}(m)$ é sempre semidefinida positiva. Se for não singular (ou, equivalentemente, definida positiva), o sistema é controlável.

O sistema discreto (ou, equivalentemente, o par (A, C)) é observável se para qualquer condição inicial desconhecida $x(0)$ existir um inteiro finito $t_1 > 0$ tal que o conhecimento da seqüência de entrada $u(t)$ e da seqüência de saída de $t = 0$ até t_1 seja suficiente para determinar de maneira única o estado inicial $x(0)$.

Teorema: são equivalentes

1) (A, C) é observável.

2) A matriz $n \times n$

$$W_{do}(n-1) = \sum_{m=0}^{n-1} (A')^m C' C A^m$$

é não-singular.

3) A matriz de observabilidade $nq \times n$

$$\mathfrak{O}_d = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tem rank n.

4) A matriz $(n+q) \times n$

$$\begin{bmatrix} A - \lambda \mathbf{I} \\ C \end{bmatrix}$$

tem rank n em todo λ.

5) Se todos os autovalores de A têm módulo menor que 1, então a solução única de

$$W_{do} - A' W_{do} A = C' C$$

é definida positiva.

$$W_{do} = \sum_{m=0}^{\infty} (A')^m C' C A^m$$

• Na literatura, existem os conceitos de controlabilidade, controlabilidade para a origem, controlabilidade a partir da origem (atingibilidade).

• Caso contínuo: $\exp(At)$ é não singular e as três são equivalentes

• Caso discreto: são equivalentes se A for não singular. Se A for singular, controlabilidade e atingibilidade são equivalentes, mas pode ser possível levar o estado de qualquer condição inicial para a origem sem que o sistema seja controlável.

Exemplo

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Sistema não controlável (rank $(\mathfrak{C}_d) = 0$)

Note que $A^k = \mathbf{0}$ para $k \geq 3$. Assim,

$$x(3) = A^3 x(0) = \mathbf{0}$$

para qualquer estado inicial $x(0)$ (e o sistema é controlável para a origem).

Equações Dinâmicas Variantes no Tempo

Considere o sistema dinâmico linear n-dimensional

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t)$$

A equação de estado é controlável em t_0 se existir $t_1 > t_0$ tal que para qualquer condição inicial $x(t_0) = x_0$ e qualquer x_1, existir uma entrada que transfere x_0 para x_1 no instante t_1.

• No caso invariante no tempo, um sistema é controlável independentemente do t_0 escolhido.

Teorema

O sistema (ou o par $(A(t), B(t))$) é controlável em t_0 se e somente se existir $t_1 > t_0$ tal que a matriz $n \times n$

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_1, \tau)d\tau$$

é não-singular.

$\Phi(t, \tau)$ é a matriz de transição de estados de $\dot{x} = A(t)x$.

Prova: primeiramente, mostra-se que se $W_c(t_0, t_1)$ é não singular, então o sistema é controlável. A solução em t_1 é dada por

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

A entrada

$$u(t) = -B'(t)\Phi'(t_1, t)W_c^{-1}(t_0, t_1)[\Phi(t_1, t_0)x_0 - x_1]$$

transfere o estado x_0 para x_1 no instante t_1. Substituindo,

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_1, \tau)d\tau \cdot$$

$$W_c^{-1}(t_0, t_1)[\Phi(t_1, t_0)x_0 - x_1]$$

$$= \Phi(t_1, t_0)x_0 - W_c(t_0, t_1)W_c^{-1}(t_0, t_1)[\Phi(t_1, t_0)x_0 - x_1] = x_1$$

e portanto a equação é controlável em t_0.

O inverso é mostrado por contradição. Suponha que o sistema é controlável mas $W_c(t_0, t_1)$ é singular (ou semidefinida positiva) para todo $t_1 > t_0$. Neste caso, existe um vetor $n \times 1$ v não nulo tal que

$$v'W_c(t_0, t_1)v = \int_{t_0}^{t_1} v'\Phi(t_1, \tau)B(\tau)B'(\tau)\Phi'(t_1, \tau)vd\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \|B'(\tau)\Phi'(t_1, \tau)v\|^2 d\tau = 0$$

implicando $B'(\tau)\Phi'(t_1, \tau)v \equiv 0$ ou $v'\Phi(t_1, \tau)B(\tau) \equiv 0$ para todo $\tau \in [t_0, t_1]$.

Se o sistema é controlável, existe uma entrada que transfere o estado inicial $x_0 = \Phi(t_0, t_1)v$ para $x(t_1) = 0$. Assim,

$$0 = \Phi(t_1, t_0)\Phi(t_0, t_1)v + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

Pré-multiplicando por v' tem-se

$$0 = v'v + \int_{t_0}^{t_1} v'\Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = \|v\|^2 + 0$$

o que contradiz a hipótese de que $v \neq 0$. Assim, se $(A(t), B(t))$ é controlável em t_0, então $W_c(t_0, t_1)$ é não singular para algum t_1 finito.

- Condições envolvem o conhecimento de $\Phi(t, \tau)$
- Condições em termos de $A(t)$ e $B(t)$

Supondo que $A(t)$ e $B(t)$ sejam $(n-1)$ vezes continuamente diferenciáveis, defina

$$M_0(t) = B(t)$$

$$M_{m+1}(t) = -A(t)M_m(t) + \frac{d}{dt}M_m(t) \;\; ; \quad m = 0, 1, \ldots, n-1$$

Assim

$$\Phi(t_2, t)B(t) = \Phi(t_2, t)M_0(t)$$

para qualquer t_2. Usando o fato que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_2, t) = -\Phi(t_2, t)A(t)$$

tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}[\Phi(t_2,t)B(t)] = \frac{\partial}{\partial t}[\Phi(t_2,t)]B(t) + \Phi(t_2,t)\frac{d}{dt}B(t)$$

$$= \Phi(t_2,t)[-A(t)M_0(t) + \frac{d}{dt}M_0(t)] = \Phi(t_2,t)M_1(t)$$

De maneira geral:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Phi(t_2,t)B(t) = \Phi(t_2,t)M_m(t) \quad ; \quad m = 0,1,\ldots,n-1$$

Teorema

Sejam $A(t)$ e $B(t)$ $n-1$ vezes continuamente diferenciáveis. O par $(A(t), B(t))$ é controlável em t_0 se existir $t_1 > t_0$ tal que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} M_0(t_1) & M_1(t_1) & \cdots & M_{(n-1)}(t_1) \end{bmatrix} = n$$

Prova: mostra-se que se o rank é n, então $W_c(t_0,t)$ é não singular para todo $t \geq t_1$. Suponha que $W_c(t_0,t)$ é singular para algum $t_2 \geq t_1$. Neste caso, existe um vetor $n \times 1$ não nulo v tal que

$$v'W_c(t_0,t_2)v = \int_{t_0}^{t_2} v'\Phi(t_2,\tau)B(\tau)B(\tau)'\Phi'(t_2,\tau)v d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{t_2} \|B(\tau)'\Phi'(t_2,\tau)v\|^2 d\tau = 0$$

implicando $B(\tau)'\Phi'(t_2,\tau)v \equiv \mathbf{0}$ ou $v'\Phi(t_2,\tau)B(\tau) = \mathbf{0}$ para todo $\tau \in [t_0,t_2]$. Diferenciando em relação a τ tem-se

$$v'\Phi(t_2,\tau)M_m(\tau) \equiv \mathbf{0}$$

para $m = 0,1,2,\ldots,n-1$ e todo $\tau \in [t_0,t_2]$ (em particular, em t_1).

Rearranjando, a equação anterior pode ser escrita

$$v'\Phi(t_2,\tau)\left[\begin{array}{cccc} M_0(t_1) & M_1(t_1) & \cdots & M_{(n-1)}(t_1)\end{array}\right] = \mathbf{0}$$

Como $\Phi(t_2,\tau)$ é não singular, $v'\Phi(t_2,\tau)$ é diferente de zero e isso contradiz a condição do teorema. Assim, a condição do teorema garante que $W_c(t_0,t_2)$ é não singular para todo $t_2 \geq t_1$ e portanto $(A(t), B(t))$ é controlável em t_0.

• Note que o teorema expressa uma condição suficiente para o sistema ser controlável.

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$M_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad M_1(t) = -A(t)M_0(t) + \frac{d}{dt}M_0(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ -t \\ -t^2 \end{bmatrix}$$

$$M_2(t) = -A(t)M_1(t) + \frac{d}{dt}M_1(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t^2-1 \\ t^4-2t \end{bmatrix}$$

$$\rho\left(\left[\begin{array}{c|c|c} M_0(t) & M_1(t) & M_2(t)\end{array}\right]\right) = \rho\left(\left[\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 2t \\ 1 & -t & t^2-1 \\ 1 & -t^2 & t^4-2t \end{array}\right]\right) = 3 \ , \ \forall \ t$$

• Observabilidade

Teorema

O sistema (ou o par $(A(t), C(t))$) é observável em t_0 se e somente se existir $t_1 > t_0$ tal que a matriz $n \times n$

$$W_o(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\tau, t_0)' C'(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau$$

é não-singular.

$\Phi(t, \tau)$ é a matriz de transição de estados de $\dot{x} = A(t)x$.

Teorema

Sejam $A(t)$ e $C(t)$ $n-1$ vezes continuamente diferenciáveis. O par $(A(t), C(t))$ é observável em t_0 se existir $t_1 > t_0$ tal que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} N_0(t_1) \\ N_1(t_1) \\ \vdots \\ N_{(n-1)}(t_1) \end{bmatrix} = n$$

sendo $N_0 = C(t)$ e

$$N_{m+1}(t) = N_m(t)A(t) + \frac{d}{dt} N_m(t) \quad ; \quad m = 0, 1, \ldots, n-1$$