Teorema de Cayley-Hamilton: mais uma prova

Seja $\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - A) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$ o polinômio característico de A. Então,

$$\Delta(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Considere a matriz Adj $(A - \lambda\mathbf{I})$ (matriz adjunta formada pelos determinantes obtidos ao retirar-se de $(A - \lambda\mathbf{I})$ uma linha e uma coluna), com elementos cuja maior potência em λ é λ^{n-1}. Assim, pode-se escrever

$$\text{Adj}\ (A - \lambda\mathbf{I}) = B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-1}\lambda + B_n$$

sendo B_i matrizes $(n \times n)$ constantes (isto é, independentes de λ) a determinar. Usando a identidade

$$(A - \lambda\mathbf{I})\text{Adj}\ (A - \lambda\mathbf{I}) = \det(A - \lambda\mathbf{I})\mathbf{I}$$

e substituindo o lado esquerdo, tem-se

$$(A - \lambda\mathbf{I})(B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + \cdots + B_{n-1}\lambda + B_n) = \\ = \det(A - \lambda\mathbf{I})\mathbf{I}$$

$$-B_1\lambda^n + (AB_1 - B_2)\lambda^{n-1} + (AB_2 - B_3)\lambda^{n-2} + \cdots \\ + (AB_{n-1} - B_n)\lambda + AB_n = \det(A - \lambda\mathbf{I})\mathbf{I}$$

e usando a equação característica do lado direito

$$-B_1\lambda^n + (AB_1 - B_2)\lambda^{n-1} + (AB_2 - B_3)\lambda^{n-2} + \cdots \\ + (AB_{n-1} - B_n)\lambda + AB_n = \lambda^n\mathbf{I} + \alpha_1\lambda^{n-1}\mathbf{I} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda\mathbf{I} + \alpha_n\mathbf{I}$$

Igualando os coeficientes de mesma potência em λ:

$$
\begin{aligned}
-B_1 &= \mathbf{I} \\
AB_1 - B_2 &= \alpha_1 \mathbf{I} \\
AB_2 - B_3 &= \alpha_2 \mathbf{I} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
AB_{n-1} - B_n &= \alpha_{n-1} \mathbf{I} \\
AB_n &= \alpha_n \mathbf{I}
\end{aligned}
$$

Multiplicando a primeira equação por A^n, a segunda por A^{n-1}, e assim por diante, e somando, do lado direito tem-se $\Delta(A)$ (e, obrigatoriamente, do lado esquerdo também). Assim,

$$
(-A^nB_1+A^nB_1)+(-A^{n-1}B_2+A^{n-1}B_2)+(-A^{n-2}B_3+A^{n-2}B_3)+\cdots
$$

$$
+(-A^2B_{n-1}+A^2B_{n-1})+(-AB_n+AB_n)=\mathbf{0}
$$

Como conclusão, $\Delta(A) = \mathbf{0}$.

• Função de matriz definida como série de potência

Suponha que $f(\lambda)$ possa ser definida

$$
f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \lambda^i
$$

com raio de convergência ρ. Se todos os autovalores de A têm magnitude menor do que ρ, então $f(A)$ pode ser definida

$$
f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i A^i
$$

Exemplo: Considere uma matriz $\hat{A}$ na forma de Jordan e seja

$$f(\lambda) = f(\lambda_1) + \frac{f'(\lambda_1)}{1!}(\lambda - \lambda_1) + \frac{f''(\lambda_1)}{2!}(\lambda - \lambda_1)^2 + \cdots$$

Então

$$f(\hat{A}) = f(\lambda_1)\mathbf{I} + \frac{f'(\lambda_1)}{1!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I}) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda_1)}{(n-1)!}(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I})^{n-1} + \cdots$$

Como $(\hat{A} - \lambda_1\mathbf{I})^k = \mathbf{0}$ para $k \geq n$, a série infinita pode ser truncada.

Calculando $\exp(At)$ por série: a série de Taylor

$$\exp(\lambda t) = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n t^n}{n!} + \cdots$$

converge para todo λ e t finitos. Então,

$$\exp(At) = \mathbf{I} + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

- Pode ser usado como método numérico para computar exponenciais de matrizes.

- Matlab: várias rotinas para cálculo de exponencial de matriz (série, aproximação de Padé, forma de Jordan)

Propriedades de $\exp(At)$

$$\exp(At) = \mathbf{I} + At + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

$$\exp(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$$

$$\exp[A(t_1 + t_2)] = \exp(At_1)\exp(At_2)$$

Fazendo $t_2 = -t_1$: $\quad \exp(At_1)\exp(-At_1) = \exp[A0] = \mathbf{I}$

$$[\exp(A(t))]^{-1} = \exp(-At)$$

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} A^k$$

$$= A\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k\Big)A$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At) = \exp(At)A$$

Note que

$$\exp[(A+B)t] = \exp(At)\exp(Bt) \quad \Longleftrightarrow \quad AB = BA$$

Transformada de Laplace de $f(t)$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \triangleq \int_0^\infty f(t)\exp(-st)dt \quad ; \quad \mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right] = s^{-(k+1)}$$

Assim: $\mathcal{L}[\exp(At)] = \sum_{k=0}^{\infty} s^{-(k+1)}A^k = s^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} s^{-k}A^k$

Como a série infinita converge para $| s^{-1}\lambda | < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(s^{-1}\lambda)^k = 1 + s^{-1}\lambda + s^{-2}\lambda^2 + \cdots = (1 - s^{-1}\lambda)^{-1}$$

$$s^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(s^{-1}A)^k = s^{-1}\mathbf{I} + s^{-2}A + s^{-3}A^2 + \cdots$$

$$= s^{-1}(\mathbf{I} - s^{-1}A)^{-1} = [s(\mathbf{I} - s^{-1}A)]^{-1} = (s\mathbf{I} - A)^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}[\exp(At)] = (s\mathbf{I} - A)^{-1}$$

• Embora na demonstração se tenha usado o fato de que os autovalores de $s^{-1}A$ têm que ter módulo menor do que 1, a expressão acima vale para todo s exceto s igual a um autovalor de A.

• Pode também ser estabelecida aplicando-se Laplace em

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At) \quad \Longrightarrow \quad s\mathcal{L}[\exp(At)] - \exp(\mathbf{0}) = A\mathcal{L}[\exp(At)]$$

$$(s\mathbf{I} - A)\mathcal{L}[\exp(At)] = \mathbf{I} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}[\exp(At)] = (s\mathbf{I} - A)^{-1}$$

Equação de Sylvester

$$AM + MB = C$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ são matrizes constantes

$M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ é a (matriz) incógnita

• Pode ser re-escrita como um conjunto de equações lineares

Por exemplo, para $n = 2$, $m = 3$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{21} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}+b_{11} & a_{23} & 0 & b_{21} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{11} & 0 & 0 & b_{21} \\ b_{12} & 0 & 0 & a_{11}+b_{22} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{12} & 0 & a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & b_{12} & a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix}$$

De maneira genérica, a equação de Sylvester pode ser escrita como $\mathcal{S}(M) = C$, definindo um mapeamento do espaço de dimensão nm para o próprio espaço.

Um autovalor de $\mathcal{S}$ pode ser definido como um escalar η tal que

$$\mathcal{S}(M) = \eta M$$

Considerando $\mathcal{S}$ como uma matriz quadrada de ordem nm, há nm autovalores η_k, $k = 1, 2, \ldots, nm$, dados por

$$\eta_k = \lambda_i + \mu_j \quad , i = 1, 2, \ldots, n \;\; ; \;\; j = 1, 2, \ldots, m$$

sendo λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ autovalores de A e μ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ autovalores de B. De fato, considerando $u \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ um autovetor à direita de A associado a λ_i, e $v \in \mathbb{R}^{1\times m}$ um autovetor à esquerda de B associado a μ_j, tem-se:

$$Au = \lambda_i u \quad ; \quad vB = v\mu_j$$

Aplicando a transformação $\mathcal{S}$ na matriz uv tem-se

$$\mathcal{S}(uv) = Auv + uvB = \lambda_i uv + uv\mu_j = (\lambda_i + \mu_j)uv$$

Como o determinante de uma matriz é igual ao produto de todos os seus autovalores; uma matriz é não singular se e somente se nenhum autovalor é igual a zero.

Se não existe nenhum i e j tais que $\lambda_i + \mu_j = 0$, então a matriz quadrada de ordem nm definida por $\mathcal{S}$ é não singular e, para cada C, a solução M da equação de Sylvester é única.

Se $\lambda_i + \mu_j = 0$ para algum i e j, dado C a solução pode existir ou não. Se C pertence ao range de $\mathcal{S}$, existem múltiplas soluções.

Equação de Lyapunov: $A'P + PA + Q = \mathbf{0}$, $P = P'$

Formas Quadráticas (Hermitianas)

São funções de n variáveis complexas da forma

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\bar{x}_i x_j = x^* M_1 x \quad \in \mathbb{R} \ , \quad m_{ij} \in \mathbb{C}$$

Como $x^* M_1 x \in \mathbb{R}$, $(x^* M_1 x)^* = (x^* M_1^* x) = (x^* M_1 x)$

$$x^* M_1 x - x^* M_1^* x = 0 \quad , \quad x^*(M_1 - M_1^*)x = 0$$

Por outro lado,

$$x^* M_1 x = x^* \left(\frac{1}{2}\left(M_1 + M_1^*\right) \right) x \triangleq x^* M x$$

$$M = \frac{1}{2}\left(M_1 + M_1^*\right) \quad \Rightarrow M = M^*$$

Toda forma Hermitiana pode ser escrita como

$$x^* M x$$

com $M = M^*$.

Exemplo: $M = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

$$x' M x = 5x_1^2 - 2x_1 x_2 + 8x_2^2 > 0 \ \ \forall \ x_1, x_2 \neq 0$$

Exemplos de formas quadráticas

$$\|Bx\|^2 = x'B'Bx \quad ; \quad \sum_{i=2}^{n}(x_{i+1} - x_i)^2 \quad ; \quad \|Fx\|^2 - \|Gx\|^2$$

Se $x'Ax = x'Bx$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e as matrizes A e B são simétricas, então $A = B$ (unicidade da forma quadrática)

Uma forma quadrática pode definir conjuntos:

$$\{x \ : \ f(x) = c\} \quad \text{(superfície quadrática)}$$

$$\{x \ : \ f(x) \leq c\} \quad \text{(região quadrática)}$$

Suponha que a matriz simétrica A foi decomposta na forma $A = Q\Lambda Q'$, com Λ diagonal contendo os autovalores reais de A ordenados $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Então

$$x'Ax = x'Q\Lambda Q'x = (Q'x)'\Lambda(Q'x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (q_i'x)^2$$

$$\leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} (q_i'x)^2 = \lambda_1 \|x\|^2$$

Similarmente, $x'Ax \geq \lambda_n \|x\|^2$. Assim,

$$\lambda_n x'x \leq x'Ax \leq \lambda_1 x'x$$

Matrizes Hermitianas $M = M^*$ (Simétricas se M é real)

• Autovalores reais

• Forma de Jordan diagonal

• Autovetores correspondentes a autovalores distintos ortogonais

Toda matriz Hermitiana M pode ser transformada por uma matriz unitária P (isto é, $P^{-1} = P^*$) em uma matriz diagonal com elementos reais:

$$\hat{M} = PMP^*$$

Positividade

• Uma matriz M é **definida positiva** se e somente se $x^*Mx > 0$, $\forall\ x \neq 0,\ x \in \mathbb{C}^n$.

• Uma matriz M é **semidefinida positiva** se e somente se $x^*Mx \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{C}^n$.

• Uma matriz M é (semi)**definida negativa** se $-M$ é (semi)definida positiva.

Uma matriz hermitiana $n \times n$ M é definida positiva (semidefinida positiva) se e somente se qualquer das condições seguintes é satisfeita.

• Todos os autovalores de M são positivos (não negativos)

• Todos os menores principais líderes de M são positivos (todos os menores principais de M são não negativos)

• Existe uma matriz não singular $n \times n$ N (uma matriz singular $n \times n$ N ou uma matriz $m \times n$ com $m < n$) tal que $M = N^*N$.

Considerando a última condição, se $M = N^*N$, então

$$x^*Mx = x^*N^*Nx = (Nx)^*(Nx) = \|Nx\|_2^2 \geq 0$$

para qualquer x. Se N é não-singular, $Nx = 0 \Rightarrow x = 0$, e portanto M é definida positiva. Se N é singular, existe $x \neq 0$ tal que $Nx = 0$ e M é semidefinida positiva.

Menores Principais de uma Matriz

Seja

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Menores Principais (determinantes de todas as submatrizes de M cujas diagonais coincidem ou fazem parte da diagonal de M):

$$m_{11} \quad , \quad m_{22} \quad , \quad m_{33}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\right) \ , \ \det\left(\begin{bmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{bmatrix}\right) \ , \ \det\left(\begin{bmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(M)$$

Menores Principais Líderes (determinantes das submatrizes de M obtidas ao eliminarem-se as últimas k colunas e k linhas, $k = 2, 1, 0$):

$$m_{11} \quad , \quad \det\left(\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\right) \quad , \quad \det(M)$$

• todos os menores principais líderes positivos $\Longrightarrow$ menores principais positivos.

No entanto, todos os menores principais líderes não negativos não implica que todos os menores são não negativos. Por exemplo,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = 0 \quad , \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad \det(M) = 0$$

Entretanto,

$$m_{22} = 0 \quad , \quad m_{33} = 2 \quad , \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -1$$

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

Exemplo: $M = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ é definida positiva, pois

$$m_{11} = 5 > 0 \;\; ; \;\; \det(M) = 39 > 0$$

$$\text{autovalores de } M: \quad \lambda_1 = 4.6972 \; ; \; \lambda_2 = 8.3028$$

$$M = N'N \;\; ; \;\; N = \begin{bmatrix} 2.2273 & -0.1981 \\ -0.1981 & 2.8215 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \det(N) = 6.2450 \neq 0$$

Note que a matriz simétrica $H'H$ é sempre semidefinida positiva; será definida positiva se $H'H$ for não singular. O mesmo vale para HH'.

Como $H'H$ e HH' são matrizes simétricas semidefinidas positivas, seus autovalores são reais e não negativos.

Se $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$, então $H'H$ tem n autovalores e HH' tem m autovalores. Usando a propriedade de determinantes, para $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$s^n \det(s\mathbf{I}_m - AB) = s^m \det(s\mathbf{I}_n - BA)$$

tem-se

$$\det(s\mathbf{I}_m - HH') = s^{m-n} \det(s\mathbf{I}_n - H'H)$$

e portanto os polinômios característicos de $H'H$ e HH' diferem apenas em s^{m-n}. Como conclusão, $H'H$ e HH' têm os mesmos autovalores positivos mas podem ter um número diferente de autovalores iguais a zero (no máximo igual a $\bar{n} \triangleq \min\{n, m\}$).

Decomposição em Valores Singulares

Seja $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e defina $M = H'H$ (simétrica, $n \times n$ e semidefinida positiva). Assim, todos os autovalores de M são reais e não negativos (zero ou positivos). Seja r o número de autovalores positivos (portanto, M tem rank r).

Os autovalores de $M = H'H$ podem ser arranjados na forma

$$\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \cdots \geq \lambda_r^2 > 0 = \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \cdots = \lambda_n$$

$\lambda_i^2\ ,\quad i = 1, 2, \ldots, n \quad : \quad$ autovalores de $H'H$

$\lambda_i\ ,\quad i = 1, 2, \ldots, \bar{n} \quad : \quad$ valores singulares de H

Exemplo

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$M = H'H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 16 \\ -2 & 16 & 34 \end{bmatrix}$$

Autovalores de M: 41.6977, 2.3023, 0

Valores singulares de H: $6.4574 = \sqrt{41.6977}$, $1.5173 = \sqrt{2.3023}$

Autovalores de HH': 41.6977, 2.3023

Valores singulares de H': $6.4574 = \sqrt{41.6977}$, $1.5173 = \sqrt{2.3023}$

Portanto, os autovalores de $H'H$ diferem dos de HH' apenas no número de zeros, e H e H' têm os mesmos valores singulares.

Teorema: (Decomposição em Valores Singulares)

Toda matriz H $m \times n$ pode ser colocada na forma

$$H = RSQ'$$

com $R'R = RR' = \mathbf{I}_m$, $Q'Q = QQ' = \mathbf{I}_n$ e S uma matriz $m \times n$ com os valores singulares de H na diagonal.

As colunas de Q (R) são autovetores ortonormais de $H'H$ (HH'). O rank de H é igual ao número de valores singulares diferentes de zero. Se o rank de H é r, as r primeiras colunas de R formam uma base ortonormal para o range de H, e as últimas $(n - r)$ colunas de Q formam uma base para o espaço nulo de H.

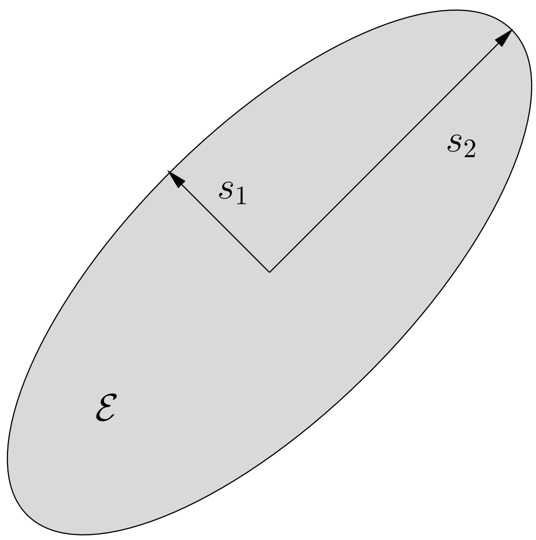
- Matlab: `[R,S,Q]=svd(H)`

Elipsóides

Se $A = A' > 0$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o conjunto

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x'Ax \leq 1\}$$

é um elipsóide no espaço $\mathbb{R}^n$ centrado em 0



Os semi-eixos são dados por $s_i = \lambda_i^{-1/2} q_i$ (autovalores determinam os tamanhos, autovetores as direções)

Se q_1 está associado ao autovalor máximo λ_{max} e q_n ao mínimo λ_{min}, a razão $\sqrt{\lambda_{max}/\lambda_{min}}$ dá a maior excentricidade.

Norma de Matrizes

$$\|A\| \triangleq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

sendo sup o supremo ou o menor limitante superior. A norma $\|A\|$, como é definida através da norma de x, é chamada norma induzida pela norma de x. Para $\|x\|$ diferentes, têm-se diferentes $\|A\|$.

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} |$$

$$\|A\|_2 = (\lambda_{max}(A^* A))^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

Propriedades

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Decorrência de

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|$$

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\|$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \|A\|_1 = 4 \; ; \; \|A\|_2 = 3.7 \; ; \; \|A\|_\infty = 5$