

EA616 — Análise Linear de Sistemas

Resolução de Equações de Estado

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

● Sistema Linear Invariante no Tempo

$$\dot{v} = Av + bx$$

$$y = cv + dx$$

$$v \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

● Dados $x(t)$ (entrada) e $v(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (condição inicial):

$\Rightarrow$ determine: $v(t)$ (e $y(t) = cv(t) + dx(t)$)

Equação Homogênea

- Equação diferencial (vetorial) homogênea de primeira ordem

$$\dot{v} = Av, \quad v(0) \in \mathbb{R}^n$$

- Pode ser transformado em equações diferenciais de ordem superior e resolvido;
- Pode ser resolvido por Laplace (e decomposição em frações parciais).

SLIT

A solução é a combinação linear dos modos próprios do sistema.

Equação Homogênea

● Laplace

$$sV(s) - v(0) = AV(s), \quad sV(s) - AV(s) = v(0) \Rightarrow V(s) = (sI - A)^{-1}v(0)$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{Adj}(sI - A) = \frac{1}{\det(sI - A)} (\text{Co}(sI - A))'$$

● Modos próprios: dependem das raízes de $\det(sI - A) = 0$

$$Av = \lambda v \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0, \quad v \in \mathbb{C}^{n \times 1} \begin{cases} \lambda \in \mathbb{C} \text{ autovalor} \\ v \neq 0 \text{ autovetor} \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (\text{Equação Característica})$$

Solução da Equação Homogênea — $\exp(At)$

- Considere a equação homogênea

$$\dot{v} = Av \quad , \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$$

- Supondo que a solução $v(t)$ possa ser escrita em série de potências, tem-se

$$v(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k t^k \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = \sum_{k=0}^{+\infty} k v_k t^{k-1} \quad , \quad v_0 = v_0$$

sendo $v_k \in \mathbb{R}^n$ os vetores da expansão em série (a determinar).

- Substituindo na equação e igualando os termos da série de potência, tem-se

$$v_1 = Av_0, \quad 2v_2 = Av_1 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{2}A^2v_0, \quad 3v_3 = Av_2 \Rightarrow v_3 = \frac{1}{3!}A^3v_0$$

$$kv_k = Av_{k-1} \Rightarrow v_k = \frac{1}{k!}A^k v_0$$

e, portanto,

$$v(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \right) v_0, \quad A^0 = I$$

- Por analogia com a série de Taylor da função $\exp(\lambda t)$

$$\exp(\lambda t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} t^k \Rightarrow \exp(At) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- Assim, a solução da equação homogênea é dada por

$$v(t) = \exp(At)v_0$$

Propriedades de $\exp(At)$

- Unicidade da solução para $t \geq 0$

$$\exp(At)u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

pois a solução $v(t)$, para $t \geq 0$, é dada por

$$v(t) = \exp(At)v_0 = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}v_0$$

para qualquer v_0 .

- Derivada

$$\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At) = \exp(At)A$$

Propriedades de $\exp(At)$

- Cômputo em $t = t_1 + t_2$

$$\exp(A(t_1 + t_2)) = \exp(At_1)\exp(At_2) = \exp(At_2)\exp(At_1)$$

- A matriz $\exp(At)$ é não singular para qualquer matriz A e para todo t , com inversa dada por

$$(\exp(At))^{-1} = \exp(-At)$$

pois, fazendo-se $t_1 = t$ e $t_2 = -t$, pela propriedade anterior tem-se

$$\exp(At)\exp(-At) = \exp(A0) = I$$

Propriedades de $\exp(At)$

- Cômputo de $\exp((A+B)t)$

$$\exp(At)\exp(Bt) = \exp(Bt)\exp(At) = \exp((A+B)t) \iff AB = BA$$

pois

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = \\ &= A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + 2BA + B^2 \iff AB = BA\end{aligned}$$

- A expansão binomial de Newton aplica-se a matrizes apenas quando o produto das matrizes comuta, o que normalmente não ocorre. Exceções para $AB = BA$, por exemplo, são dadas por $B = \exp(At)$ ou quando A e B são diagonais.

Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz A satisfaz sua equação característica, isto é,

$$\det(\lambda I - A) = \Delta(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta(A) = 0$$

Função de matriz quadrada & Briot-Ruffini

Seja $f(\lambda)$ uma função polinomial e $\Delta(\lambda)$ um polinômio de grau n em λ . Então,

$$f(\lambda) = q(\lambda)\Delta(\lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \lambda^k$$

Para λ autovalor de A , $\Delta(\lambda) = 0$ e, pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$\Delta(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k A^k$$

● Note que, para matrizes bloco-diagonais com submatrizes quadradas,

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_\ell) \quad \Rightarrow \quad f(A) = \text{diag}(f(A_1), \dots, f(A_\ell))$$

Cálculo de $\exp(At)$

- Para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com equação característica $\Delta(A) = 0$,

$$\exp(At) = q(A, t)\Delta(A) + r(A, t) = r(A, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(t)A^k$$

Para uma discussão sobre aspectos numéricos do cálculo de $\exp(At)$, recomenda-se

- C. Moler and C. Van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. SIAM Review, 20(4):801–836, October 1978.
- C. Moler and C. Van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. SIAM Review, 45(1):3–49, March 2003.

Transformação de Similaridade

- Considere a equação de estado

$$\dot{v} = Av \quad , \quad v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^n$$

e a mudança de variáveis (T não singular)

$$v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad T\dot{\hat{v}} = AT\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{v}} = \hat{A}\hat{v} \quad ; \quad \hat{A} = T^{-1}AT \quad , \quad A = T\hat{A}T^{-1}$$

- Transformações de similaridade preservam os autovalores, pois

$$\det(\hat{A} - \lambda I) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T) = \det(A - \lambda I)$$

e também preservam a função de transferência

$$\begin{aligned} H(s) &= cT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}Tb + d \\ &= cT^{-1}(sTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1}Tb + d \\ &= cT^{-1}(T(sI - A)T^{-1})^{-1}b + d \\ &= c(sI - A)^{-1}b + d \end{aligned}$$

- Escolhas apropriadas da transformação T podem levar a representações $\hat{A}$ diagonal ou triangular, dependendo da estrutura de autovalores e autovetores da matriz A .

Função de matriz similar

$$A = T\hat{A}T^{-1} \Rightarrow f(A) = Tf(\hat{A})T^{-1}$$

Pois, pelo Teorema de Cayley-Hamilton,

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \underbrace{(T\hat{A}T^{-1}) \cdots (T\hat{A}T^{-1})}_{k \text{ vezes}} = T \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \hat{A}^k T^{-1} = Tf(\hat{A})T^{-1}$$

Matrizes Diagonalizáveis

● Se uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possui n autovetores linearmente independentes, a transformação Q construída com os autovetores (colunas) resulta em

$$AQ = Q\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = Q^{-1}AQ = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

sendo λ_i , $i = 1, \dots, n$ os autovalores de A , pois

$$A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Note que os autovalores não precisam ser distintos.

● Os autovetores associados a autovalores distintos de uma matriz A são linearmente independentes. Portanto, a matriz Q composta de autovetores diagonaliza a matriz pela transformação de similaridade $Q^{-1}AQ$.

● As matrizes

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 0 \\ 0 & \alpha + j\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

são similares, pois

$$\det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 0 \\ 0 & \alpha + j\beta \end{bmatrix} \right) = \det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) = (\lambda - \alpha)^2 + \beta^2$$

Forma modal: $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$

- Considere a matriz na forma modal

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{autovalores:} \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

Utilizando Briot-Ruffini e $\Delta(\lambda)$ nos autovalores de M tem-se

$$\exp((\alpha + j\beta)t) = \rho_0 + \rho_1(\alpha + j\beta), \quad \exp((\alpha - j\beta)t) = \rho_0 + \rho_1(\alpha - j\beta),$$

que, somando e subtraindo, produzem

$$\rho_0 + \rho_1\alpha = \exp(\alpha t) \cos(\beta t), \quad \rho_1\beta = \exp(\alpha t) \sin(\beta t)$$

Por Cayley-Hamilton, tem-se

$$\exp(Mt) = \rho_0 I + \rho_1 M = \exp(\alpha t) \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

Transformações de Similaridade e Formas de Jordan

Propriedade

“Qualquer” matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ admite uma transformação de similaridade

$$AQ = QJ \quad \Rightarrow \quad J = Q^{-1}AQ$$

que leva a uma (“única”) matriz $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ formada por blocos de Jordan.

● Blocos de Jordan são matrizes quadradas com o mesmo autovalor σ na diagonal principal e uma subdiagonal superior de uns:

$$[\sigma], \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Forma de Jordan — Mesmo autovalor

- Considere uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com autovalor σ de multiplicidade algébrica (MA) igual a n , isto é,

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \sigma)^n$$

- O número de blocos na representação de A na forma de Jordan é igual à multiplicidade geométrica (MG) do autovalor σ , ou seja, é igual ao número de autovetores linearmente independentes associados a σ , que por sua vez é igual à dimensão do espaço nulo de

$$(A - \lambda I)v = 0, \quad 1 \leq \text{MG} \leq \text{MA}$$

Espaço nulo e *rank* (posto) de uma matriz

- Para $M \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$, a dimensão do espaço nulo de $Mv = 0$ é igual ao número ℓ de colunas de M menos o *rank* (ou posto) de M .
- O *rank* ρ de uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$ é igual ao número de linhas linearmente independentes da matriz, que por sua vez é igual ao número de colunas linearmente independentes da matriz,

$$\text{rank}(M) = \rho \leq \min\{m, \ell\}$$

Determinação da Forma de Jordan

- As formas de Jordan possíveis para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ com o mesmo autovalor σ são

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}, \quad \text{se } MG=2 \qquad \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}, \quad \text{se } MG=1$$

- As formas de Jordan possíveis para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ com o mesmo autovalor σ são

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} (MG=3), \quad \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} (MG=2), \quad \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} (MG=1)$$

Determinação da Transformação de Jordan

● A transformação de similaridade Q pode ser obtida resolvendo-se o sistema de equações $AQ = QJ$

● Por exemplo, para $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $M_G=1$, tem-se

$$A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Note que q_1 é autovetor, pois

$$Aq_1 = \sigma q_1, \quad (A - \sigma I)q_1 = 0$$

mas q_2 não é

$$Aq_2 = q_1 + \sigma q_2, \quad (A - \sigma I)q_2 = q_1$$

q_2 é chamado de autovetor generalizado de grau 2, pois $(A - \sigma I)^2 q_2 = 0$

Determinação da Transformação de Jordan

● Por exemplo, para $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $MG=1$, tem-se

$$A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

$$(A - \sigma I)q_1 = 0, \quad (A - \sigma I)q_2 = q_1, \quad (A - \sigma I)q_3 = q_2$$

$$(A - \sigma I)^2 q_2 = 0, \quad (A - \sigma I)^3 q_3 = 0$$

q_1 é o único autovetor (pois $MG=1$)

q_2 e q_3 são autovetores generalizados (respectivamente de grau 2 e 3)

Determinação da Transformação de Jordan

● Para $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $\text{MG}=2$, tem-se $J = \text{diag}\{J_2(\sigma), J_1(\sigma)\}$

$$A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

$$(A - \sigma I)q_1 = 0, \quad (A - \sigma I)q_3 = 0$$

$$(A - \sigma I)q_2 = q_1, \quad (A - \sigma I)^2 q_2 = 0$$

q_1 e q_3 são autovetores (pois $\text{MG}=2$)

q_2 é um autovetor generalizado de grau 2 associado a q_1

$J = \text{diag}\{J_1(\sigma), J_2(\sigma)\}$ é considerada a mesma forma de Jordan

- Casos maiores requerem tratamento mais complexo para determinação da forma de Jordan;
- Os procedimentos para a determinação da forma de Jordan são numericamente instáveis (exceto para matrizes cujos elementos são números inteiros ou razão de inteiros pequenos);
- No Matlab, $[Q, J] = \text{jordan}(A)$ fornece Q e J tais que $AQ = QJ$ (cálculo simbólico);
- Formas de Jordan são úteis para construir sistemas lineares homogêneos que produzem como saída uma determinada função.

Função de bloco de Jordan

● Considere um bloco de Jordan de ordem k com autovalor σ e uma função $f(\lambda)$ diferenciável $k - 1$ vezes. Então,

$$f(J_k) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \ddot{f}(\lambda)/2! & \dots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \dots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

Por exemplo,

$$\exp(J_3(-2)t) = \exp\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} t\right) = \exp(-2t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Considere as matrizes

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} M & I \\ 0 & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{bmatrix} M & I \\ 0 & M \end{bmatrix} t\right) &= \begin{bmatrix} \exp(Mt) & t \exp(Mt) \\ 0 & \exp(Mt) \end{bmatrix} = \\ &= \exp(\alpha t) \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) & t \cos(\beta t) & -t \sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) & t \sin(\beta t) & t \cos(\beta t) \\ 0 & 0 & \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ 0 & 0 & \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Para escolher matrizes A , c e v_0 tais que o sistema

$$\dot{v} = Av \quad , \quad y = cv \quad , \quad v(0) = v_0$$

produza a saída $y(t) = 3t^2 \exp(-2t)$, pode-se utilizar a forma de Jordan. Necessariamente, a matriz A deve possuir o autovalor -2 com multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 1, ou seja, a forma de Jordan deve conter o bloco

$$J_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \exp(J_3 t) = \exp(-2t) \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma possível solução é dada por

$$A = J_3 \quad , \quad v_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}' \Rightarrow v(t) = \exp(-2t) \begin{bmatrix} t^2/2 & t & 1 \end{bmatrix}'$$

$\Rightarrow c = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Note que outras matrizes, inclusive de dimensões maiores, poderiam ser usadas para gerar o mesmo sinal $y(t)$. A opção apresentada é a de menor dimensão.

Solução da equação não homogênea

- Considere as equações de estado e de saída do sistema SISO

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad v(0) = v_0 \quad , \quad y = cv + dx$$

Aplicando a transformada de Laplace, tem-se

$$sV(s) - v_0 = AV(s) + bX(s) \quad , \quad Y(s) = cV(s) + dX(s)$$

sendo $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$, $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Portanto,

$$Y(s) = c(sI - A)^{-1}v_0 + (c(sI - A)^{-1}b + d)X(s)$$

A função de transferência é dada por ($v_0 = 0$)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = c(sI - A)^{-1}b + d$$

Sistema homogêneo aumentado

- Considere novamente o sistema SISO cuja equação de estado é dada por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad v(0) = v_0 \quad , \quad y = cv + dx$$

sendo $x(t)$ solução da equação de estado homogênea

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v} \quad , \quad \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \quad , \quad x = \bar{c}\bar{v}$$

A solução $v(t)$ do sistema original não homogêneo pode ser obtida a partir da solução do sistema homogêneo dado por

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{A}\tilde{v} \quad , \quad \tilde{v}(0) = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix} \quad , \quad y = \tilde{c}\tilde{v}$$

com

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix} \quad , \quad y = [c \quad d\bar{c}] \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$