EA616 — Análise Linear de Sistemas
Forma de Jordan
Introdução

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Autovalores em Matrizes Estruturadas

- Forma modal

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \ \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \alpha)^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha \pm j\beta$$

- Forma triangular (superior, inferior ou diagonal)

$$A = \begin{bmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \ \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d) = 0$$

Transformações de Similaridade

- A mudança da base de representação de variáveis de estado $\hat{v} = Tv$ pode ser feita com qualquer matriz $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que T^{-1} exista. Assim o SLIT

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx$$

pode ser representado de maneira equivalente $(v = T^{-1}\hat{v})$ por

$$\dot{\hat{v}} = TAT^{-1}\hat{v} + Tbx, \quad y = cT^{-1}\hat{v} + dx$$

Propriedade

Autovalores e funções de transferência são invariantes com transformações de similaridade.

Transformações de Similaridade

- A e TAT^{-1} são *similares* pois possuem os mesmos autovalores:

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I - TAT^{-1}) &= \det(\lambda TT^{-1} - TAT^{-1}) = \det\big(T(\lambda I - A)T^{-1}\big) \\
&= \det(T)\det(\lambda I - A)\det(T^{-1}) \\
&= \det(\lambda I - A)
\end{aligned}
$$

- Os sistemas possuem a mesma função de transferência

$$
\begin{aligned}
H(s) &= cT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}Tb + d \\
&= cT^{-1}(sTT^{-1} - TAT^{-1})^{-1}Tb + d \\
&= cT^{-1}\big(T(sI - A)T^{-1}\big)^{-1}b + d \\
&= c(sI - A)^{-1}b + d
\end{aligned}
$$

Transformações de Similaridade e Formas de Jordan

Propriedade

"Qualquer" matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ admite uma transformação de similaridade

$$AQ = QJ \quad \Rightarrow \quad J = Q^{-1}AQ$$

que leva a uma (única) matriz $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ formada por blocos de Jordan.

- Blocos de Jordan são matrizes quadradas com o mesmo autovalor σ na diagonal principal e uma subdiagonal superior de uns:

$$\begin{bmatrix}\sigma\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sigma & 1 \\ 0 & \sigma\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & \sigma\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sigma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma\end{bmatrix}$$

Forma de Jordan — Mesmo autovalor

Propriedade

Considere uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ com autovalor σ de multiplicidade algébrica (MA) igual a n, isto é,

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \sigma)^n$$

O número de blocos na representação de A na forma de Jordan é igual à multiplicidade geométrica (MG) do autovalor σ, ou seja, é igual ao número de autovetores linearmente independentes associados a σ, que por sua vez é igual à dimensão do espaço nulo de

$$(A - \lambda I)v = 0, \quad 1 \leq \text{MG} \leq \text{MA}$$

Espaço nulo e *rank* (posto) de uma matriz

- Para $M \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$, a dimensão do espaço nulo de $Mv = 0$ é igual ao número ℓ de colunas de M menos o *rank* (ou posto) de M.

- O *rank* ρ de uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$ é igual ao número de linhas linearmente independentes da matriz, que por sua vez é igual ao número de colunas linearmente independentes da matriz,

$$\mathrm{rank}(M) = \rho \leq \min\{m, \ell\}$$

Determinação da Forma de Jordan

- As formas de Jordan possíveis para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ com o mesmo autovalor σ são

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}, \quad \text{se MG=2} \qquad \begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}, \quad \text{se MG=1}$$

- As formas de Jordan possíveis para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ com o mesmo autovalor σ são

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} (\text{MG=3}), \quad \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} (\text{MG=2}), \quad \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} (\text{MG=1})$$

Determinação da Transformação de Jordan

- A transformação de similaridade Q pode ser obtida resolvendo-se o sistema de equações $AQ = QJ$

- Por exemplo, para $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e MG=1, tem-se

$$A\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

Note que q_1 é autovetor, pois

$$Aq_1 = \sigma q_1, \quad (A-\sigma I)q_1 = 0$$

mas q_2 não é

$$Aq_2 = q_1 + \sigma q_2, \quad (A-\sigma I)q_2 = q_1$$

q_2 é chamado de autovetor generalizado de grau 2, pois $(A-\sigma I)^2 q_2 = 0$

Determinação da Transformação de Jordan

- Por exemplo, para $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e MG=1, tem-se

$$A\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

$$(A-\sigma I)q_1 = 0, \quad (A-\sigma I)q_2 = q_1, \quad (A-\sigma I)q_3 = q_2$$

$$(A-\sigma I)^2 q_2 = 0, \quad (A-\sigma I)^3 q_3 = 0$$

q_1 é o único autovetor (pois MG=1)

q_2 e q_3 são autovetores generalizados (respectivamente de grau 2 e 3)

Determinação da Transformação de Jordan

- Para $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e MG=2, tem-se $J = \mathrm{diag}\{J_2(\sigma), J_1(\sigma)\}$

$$A \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

$$(A - \sigma I)q_1 = 0, \quad (A - \sigma I)q_3 = 0$$

$$(A - \sigma I)q_2 = q_1, \quad (A - \sigma I)^2 q_2 = 0$$

q_1 e q_3 são autovetores (pois MG=2)

q_2 é um autovetor generalizado de grau 2 associado a q_1

$J = \mathrm{diag}\{J_1(\sigma), J_2(\sigma)\}$ é considerada a mesma forma de Jordan

Formas de Jordan

- Casos maiores requerem tratamento mais complexo para determinação da forma de Jordan;
- Os procedimentos para a determinação da forma de Jordan são numericamente instáveis (exceto para matrizes cujos elementos são números inteiros ou razão de inteiros pequenos);
- No Matlab, `[Q,J]=jordan(A)` fornece Q e J tais que $AQ = QJ$ (cálculo simbólico)