EA616A — Análise Linear de Sistemas
Uso da Transformada Z
para Resolução de Equações a Diferenças

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Segundo Semestre de 2024

Equações a diferenças

- Por exemplo:

$$y[n+2]+5y[n+1]+6y[n]=x[n], \quad y[0],\ y[1] \text{ dados}, \quad n\in(-\infty,+\infty)$$

- Podem ser resolvidas por Transformada Z para $n \geq 0$
- Para isso, multiplicando a equação por $u[n]$ ambos os lados tem-se

$$\Big(y[n+2]+5y[n+1]+6y[n]\Big)u[n]=x[n]u[n]$$

ou

$$y[n+2]u[n]+5y[n+1]u[n]+6y[n]u[n]=x[n]u[n], \quad y[0],\ y[1] \text{ dados}$$

Propriedades da Transformada Z

- Propriedade 11 (Cap. 2) — Deslocamento à esquerda (avanço)

$$\mathscr{Z}\{y[n+1]u[n]\} = zY(z) - zy[0]$$

- Propriedade 12 (Cap. 2) — Generalizando para dois avanços

$$\mathscr{Z}\{y[n+2]u[n]\} = z\big(zY(z) - zy[0]\big) - zy[1] = z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1]$$

- Aplicando na equação, tem-se

$$z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1] + 5\big(zY(z) - zy[0]\big) + 6Y(z) = X(z)$$

Resolvendo a Equação

- Isolando $Y(z)$

$$\left(z^2+5z+6\right)Y(z)=z^2y[0]+zy[1]+5zy[0]+X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)=\frac{z^2y[0]+zy[1]+5zy[0]}{(z+2)(z+3)}+\frac{1}{(z+2)(z+3)}X(z)$$

- Para a entrada $X(z)=0$, tem-se

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{3y[0]+y[1]}{z+2}+\frac{-2y[0]-y[1]}{z+3}$$

$$\Rightarrow y[n]=\left((3y[0]+y[1])(-2)^n-(2y[0]+y[1])(-3)^n\right)u[n]$$

- Propriedade 12 (generalizada)

$$\mathscr{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\left(\mathscr{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\right) \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

- Decomposição em frações parciais (de $Y(z)/z$)

- Propriedade 14 (Combinatória com Deslocamento)

$$\mathscr{Z}\left\{\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array}\right) a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \quad , \quad |z| > |a| \ , \ m \in \mathbb{N}$$

Exemplo

- Resolva, usando transformada Z, a equação a diferenças

$$y[n+1] + 2y[n] = 2(5)^n, \quad y[0] = 10$$

- Multiplicando por $u[n]$ e aplicando a transformada Z

$$(z+2)Y(z) = 10z + 2\frac{z}{z-5} \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{10z}{z+2} + 2\frac{z}{(z+2)(z-5)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{10}{z+2} + \frac{2}{(z+2)(z-5)} = \frac{10z-48}{(z+2)(z-5)} = \frac{(68/7)}{z+2} + \frac{(2/7)}{z-5}$$

$$\Rightarrow y[n] = \big((68/7)(-2)^n + (2/7)(5)^n\big)u[n]$$