1ª Questão: Determine $y(t)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = \exp(At)v(0), \quad y = c\exp(At)v(0), \quad y(t) = 5t\exp(-2t) + 10\cos(2t)\exp(-t)$$

2ª Questão: Determine as matrizes J (forma de Jordan) e Q tais que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^3, \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & d & a \\ 0 & e & b \\ a & a+d & a \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo) que produza como saída da equação de estados abaixo a função $y(t) = 5t\exp(2t) - 4t\exp(-5t)$

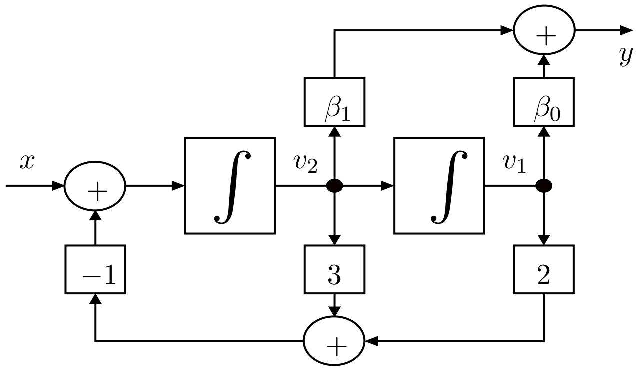
$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}\ ,\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0\ ,\ y = \bar{c}\bar{v}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Determine α_0 e α_1 tais que (I é a matriz identidade 2×2)

$$A^{10} = \alpha_0 I + \alpha_1 A, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^{10} = (2 - 2^{10})I + (2^{10} - 1)A = (-1022)I + (1023)A$$

5ª Questão: Determine os valores de β_1 em função de β_0 para que o sistema abaixo não seja observável

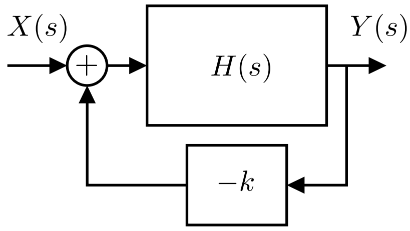


$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c & cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ -2\beta_1 & \beta_0 - 3\beta_1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{Obsv}(A,c)) = \beta_0^2 - 3\beta_1\beta_0 + 2\beta_1^2$$
$$= (\beta_0 - \beta_1)(\beta_0 - 2\beta_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \beta_0 = \beta_1, \beta_0 = 2\beta_1$$

6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 6s + 5}, \quad D(s) = s^3 + ks^2 + (6-k)s + 5 \ \ , \ \ 1 < k < 5$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados no qual a $\psi(v_1, v_2)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_1, v_2) = (0, 0)$ do sistema não linear dado por

$$\dot{v}_1 = -v_1 + v_1^3 + v_1 v_2^2, \quad \dot{v}_2 = v_1^2 v_2 - v_2 + v_2^3$$

Tem-se $\psi(v_1, v_2) > 0$, $\forall (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ e

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(v_1, v_2) &= v_1\dot{v}_1 + v_2\dot{v}_2 = v_1(-v_1 + v_1^3 + v_1v_2^2) + v_2(v_1^2v_2 - v_2 + v_2^3) \\
&= -v_1^2 + v_1^4 + v_1^2v_2^2 + v_1^2v_2^2 - v_2^2 + v_2^4 = (v_1^2 + v_2^2 - 1)v_1^2 + (v_1^2 + v_2^2 - 1)v_2^2 \\
&= (v_1^2 + v_2^2 - 1)(v_1^2 + v_2^2) < 0, \forall (v_1, v_2) \neq (0,0) \in \Omega, \quad \Omega = \big\{(v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 < 1\big\}
\end{aligned}$$

ou ainda

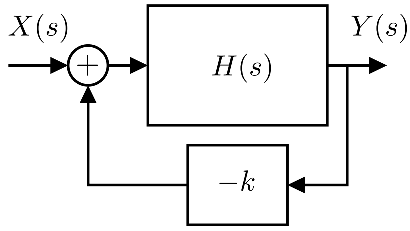
$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(v_1, v_2) &= -v_1^2 + v_1^4 + 2v_1^2v_2^2 - v_2^2 + v_2^4 = (v_1^2 + v_2^2)^2 - (v_1^2 + v_2^2) \\
&= (v_1^2 + v_2^2)(v_1^2 + v_2^2 - 1) < 0, \forall (v_1, v_2) \neq (0,0) \in \Omega, \quad \Omega = \big\{(v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 < 1\big\}
\end{aligned}$$

8ª Questão: Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \ b) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

a) Instável (autovalor com parte real positiva)
b) Estável (autovalores com parte real nula em blocos de Jordan de tamanho um e autovalores com parte real negativa)

9ª Questão: Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para o sistema mostrado na figura com

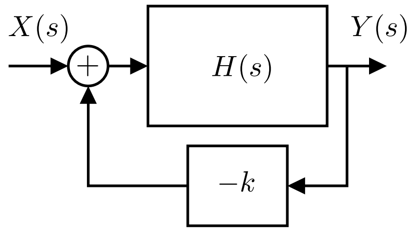


$$H(s) = \frac{(s-4)^2(s-1+j)(s-1-j)}{(s-1)^2(s-1+2j)(s-1-2j)(s-4+j)(s-4-j)(s-4+2j)(s-4-2j)}$$

Eixo real: $\nexists$, Número: $\eta = 8 - 4 = 4$

Ângulos: $\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$, Encontro: $\frac{1}{4}(1+1+1+1+4+4+4+4-(4+4+1+1)) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

10ª Questão: Determine os valores de ω nos cruzamentos com o eixo imaginário e o correspondente valor de $k \geq 0$ para o sistema mostrado na figura ao lado com



$$H(s) = \frac{s^2 + 8s + 12}{s^2 - 8s + 12}$$

Para $s = j\omega$, em malha fechada tem-se

$$(j\omega)^2 - 8j\omega + 12 + k((j\omega)^2 + 8j\omega + 12) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1, s = \pm j\omega, \omega = \sqrt{12}$$