1ª Questão: Determine, para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação abaixo, a solução forçada $y_f[n]$ para a entrada $x[n] = 5 + (j)^n, \;\; j = \sqrt{-1}$

$$y[n+2] + 5y[n] = x[n+1]$$

$$H(z) = \frac{z}{z^2+5}, \quad y_f[n] = H(1)5 + H(j)(j)^n = \frac{5}{6} + \frac{j}{4}(j)^n$$

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{8z}{(z+2)^3}, \quad |z| < 2$$

$$Y(z) = X(z^{-1}) = \frac{8z^{-1}}{(z^{-1}+2)^3} = \frac{z^2}{(z+(1/2))^3} = z^{-1}\left(\frac{z^3}{(z+(1/2))^3}\right), \; |z| > 1/2$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^3}{(z+(1/2))^3}\right\} = \left(\begin{array}{c} n+2 \\ 2 \end{array}\right)(-1/2)^n u[n] = \frac{(n+2)(n+1)}{2}(-1/2)^n u[n]$$

$$y[n] = \frac{(n+2)(n+1)}{2}(-1/2)^n u[n]\Big|_{n \leftarrow n-1} = \frac{(n+1)n}{2}(-1/2)^{n-1}u[n-1] = -(n+1)n(-1/2)^n u[n]$$

$$\Rightarrow x[n] = y[-n] = (-n+1)n(-2)^n u[-n]$$

3ª Questão: Determine, para a sequência cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{5(z^2+2)(z-5)(2z+3)}{(2z^2+1)(z-1)(3z-1)} \;, \; |z| > 1$$

a) $x[0]$ b) $x[+\infty]$

$$x[0] = 5/3, \quad x[\infty] = -50$$

4ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = X(z) = \frac{-5}{z-6}$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$ b) $\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_k k^2 \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

$$\Pr\{\mathbb{X} = 1\} = \frac{d}{dz}X(z)\Big|_{z=0} = \frac{5}{(z-6)^2}\Big|_{z=0} = \frac{5}{36}$$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_k k^2 \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)^2 X(z)\Big|_{z=1} = z\left(\frac{-5z-30}{(z-6)^3}\right)\Big|_{z=1} = \frac{7}{25}$$

5ª Questão: Determine: a) $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução $y[n]$, $n \geq 0$, da equação a diferenças abaixo

$$y[n+1] + 2y[n] = 6, \quad y[0] = 4$$

b) $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

$$Y(z) = \frac{z4}{z+2} + \frac{6z}{(z+2)(z-1)} = \frac{2z}{z+2} + \frac{2z}{z-1}, \quad y[n] = \big(2(-2)^n + 2\big)u[n]$$

6ª Questão: Determine a resposta ao impulso $h[n]$, $n \geq 0$ (condições iniciais nulas) do sistema linear discreto invariante no tempo descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] - y[n+1] - 2y[n] = 5x[n]$$

$$H(z) = \frac{5}{(z+1)(z-2)} = (-5/2) + \frac{(5/3)z}{z+1} + \frac{(5/6)z}{z-2}, \quad h[n] = (-5/2)\delta[n] + \big((5/3)(-1)^n + (5/6)(2)^n\big)u[n]$$

ou, alternativamente,

$$H(z) = \frac{-(5/3)}{z+1} + \frac{(5/3)}{z-2} = z^{-1}\left(\frac{-(5/3)z}{z+1} + \frac{(5/3)z}{z-2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad h[n] = \big(-(5/3)(-1)^{n-1} + (5/3)(2)^{n-1}\big)u[n-1] = \big((5/3)(-1)^n + (5/6)(2)^n\big)u[n-1]$$

7ª Questão: Determine a solução da equação a diferenças

$$y[n+1] = y[n] + 4n, \quad y[1] = 2, \quad \Rightarrow \quad y[n] = \underbrace{-2n + 2n^2}_{y_f[n]} + 2$$

8ª Questão: Determine, para a equação a diferenças abaixo

$$y[n+1] - y[n] = 6n^2, \quad y[0] = 5$$

a) A parcela forçada da solução   b) A solução

$$y[n] = \underbrace{2n^3 - 3n^2 + n}_{y_f[n]} + 5$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= (v_1+4)(v_2+1) + 5x \\ \dot{v}_2 &= (v_1+3)(v_2+2) - 3x \end{aligned}$$

$$(-4,-2), \quad (-3,-1)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}^2$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} v_2+1 & v_1+4 \\ v_2+2 & v_1+3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} x$$

$$(-4,-2): \ \dot{v} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} x, \ \text{assint. estável, autovalores c/ parte real negativa}$$

$$(-3,-1): \ \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} x, \ \text{instável, um autovalor c/ parte real positiva}$$

10ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^4 + 2p^3 - 4p^2 + 5p + 1)y(t) = (2p^4 + p^3 - 12p^2 + 16p + 4)x(t), \quad p = \frac{d}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$