Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Determine, para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação abaixo, a solução forçada $y_f[n]$ para a entrada $x[n] = 5 + (j)^n, \; j = \sqrt{-1}$

$$y[n+2] + 5y[n] = x[n+1]$$

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{8z}{(z+2)^3}, \quad |z| < 2$$

3ª Questão: Determine, para a sequência cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{5(z^2+2)(z-5)(2z+3)}{(2z^2+1)(z-1)(3z-1)} \; , \; |z| > 1$$

a) $x[0]$

b) $x[+\infty]$

4ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = X(z) = \frac{-5}{z-6}$$

Determine:

a) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$

b) $\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_k k^2 \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

5ª Questão: Determine: a) $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução $y[n]$, $n \geq 0$, da equação a diferenças abaixo

$$y[n+1] + 2y[n] = 6, \quad y[0] = 4$$

b) $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

6ª Questão: Determine a resposta ao impulso $h[n]$, $n \geq 0$ (condições iniciais nulas) do sistema linear discreto invariante no tempo descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] - y[n+1] - 2y[n] = 5x[n]$$

7ª Questão: Determine a solução da equação a diferenças

$$y[n+1] = y[n] + 4n, \quad y[1] = 2$$

8ª Questão: Determine, para a equação a diferenças abaixo

$$y[n+1] - y[n] = 6n^2, \quad y[0] = 5$$

a) A parcela forçada da solução

b) A solução

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= (v_1 + 4)(v_2 + 1) + 5x \\ \dot{v}_2 &= (v_1 + 3)(v_2 + 2) - 3x \end{aligned}$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}^2$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear

10ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^4 + 2p^3 - 4p^2 + 5p + 1)y(t) = (2p^4 + p^3 - 12p^2 + 16p + 4)x(t), \quad p = \frac{d}{dt}$$

degrau: $u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$, impulso: $\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$, $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$, $u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$

Transf. Z: $\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}$, $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$, $\mathcal{Z}\{-a^n u[-n-1]\} = \frac{z}{z-a}, |z| < |a|$

$\mathcal{Z}\{na^{n-1}u[n]\} = \frac{z}{(z-a)^2}$, $|z| > |a|$, $\mathcal{Z}\{-na^{n-1}u[-n]\} = \frac{z}{(z-a)^2}$, $|z| < |a|$

$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z), z \in \Omega_x \Leftrightarrow \mathcal{Z}\{x[-n]\} = X(z^{-1}), z^{-1} \in \Omega_x$, $\mathcal{Z}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \mathcal{Z}\{x_1[n]\}\mathcal{Z}\{x_2[n]\}$

$m \in \mathbb{Z}_+ :$ $\mathcal{Z}\{n^m x[n]\} = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z)$, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^m x[k] = \mathcal{Z}\{n^m x[n]\}\Big|_{z=1}$, $1 \in \Omega_x$

$\mathcal{Z}\{y[n] = x[n-m]u[n-m]\} = z^{-m}\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\}$, $\mathcal{Z}\{x[n+m]u[n]\} = z^m\left(\mathcal{Z}\{x[n]u[n]\} - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}\right)$

$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} a^{n-m}u[n]\right\} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}}$, $|z| > |a|$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Z}\{n^2 a^n u[n]\} = \frac{az^2 + a^2 z}{(z-a)^3}$, $|z| > |a|$

$\mathcal{Z}\left\{\begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} a^n u[n]\right\} = (1 - az^{-1})^{-(m+1)} = \frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$, $m \in \mathbb{N}$, $|z| > |a|$

$x[0] = \lim_{|z| \to +\infty} X(z)$, Ω_x exterior de um círculo , $x[+\infty] = \lim_{z \to 1}(z-1)X(z)$, $|z| > \rho$, $0 < \rho \leq 1$

Transf. Z e Probabilidade: $G_{\mathbb{X}}(z) = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \mathcal{Z}\{p[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pr\{\mathbb{X} = k\}z^k$

$G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}G_{\mathbb{X}}(z)\Big|_{z=0} z^n$, $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ var. aleat. independentes $\Rightarrow$ $\mathcal{E}\{z^{(\mathbb{X}+a\mathbb{Y})}\} = \mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\}\mathcal{E}\{(z^a)^{\mathbb{Y}}\}$

$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k kp[k]$, $\mathcal{E}\{\mathbb{X}^m\} = \sum_k k^m p[k]$, $\sigma_{\mathbb{X}}^2 = \mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathcal{E}\{\mathbb{X}\}^2$, $\mathcal{E}\{\mathbb{X}^m\} = \left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathcal{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1}$

Eq. dif. (Transf. Z): $\mathcal{Z}\{y[n+2]u[n]\} = z^2 Y(z) - z^2 y[0] - zy[1]$, $\mathcal{Z}\{y[n+1]u[n]\} = zY(z) - zy[0]$

Eq. dif. (Coef. a determinar): $py[n] \triangleq y[n+1]$, **Autofunção** (SLIT): $x[n] = z^n \Rightarrow y_f[n] = H(z)z^n$

$D(p)y[n] = 0 \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k[n]$, $f_k[n]$ modos próprios (considerando multiplicidades)

λ: raiz de multiplicidade r de $D(\lambda) \Rightarrow \lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{r-1}\lambda^n$ (r modos próprios)

$$D(p)y[n] = N(p)x[n] \ , \ \text{se} \ \bar{D}(p)x[n] = 0 \ \text{então} \ \bar{D}(p)D(p)y[n] = 0$$

Solução forçada: $y[n] = y_h[n] + y_f[n] \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f[n] = N(p)x[n]$, $D(p)y_h[n] = 0$

$$y_f[n] = \sum_{k=1}^{m} b_k g_k[n], \quad g_k[n] \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Variáveis de estado: $\dot{v}(t) = f(v(t), x(t), t)$, $y(t) = g(v(t), x(t), t)$

Ponto de equilíbrio: $\bar{v}$ tal que $f(\bar{v}, \bar{x}) = 0$, $\bar{x}$ =cte. Sistema linear (em torno de $\bar{v}$)

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}, \ B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}, \ C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}}, \ D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]\Bigg|_{\bar{v},\bar{x}} \ \begin{cases} \text{Autovalores: } \det(\lambda I - A) = 0 \\ \exists i \mid \text{Re}(\lambda_i) > 0 : \bar{v} \text{ instável} \\ \text{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i : \bar{v} \text{ assint. estável} \\ \exists i \mid \text{Re}(\lambda_i) = 0 : \bar{v} \text{ inconclusivo} \end{cases}$$

$$p = \frac{d}{dt}, \quad \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\overline{\beta}_2 p^2 + \overline{\beta}_1 p + \overline{\beta}_0}{p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0} + \beta_3 = c(p\text{I} - A)^{-1}b + d = b'(p\text{I} - A')^{-1}c' + d$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{bmatrix}, \quad c' = \begin{bmatrix} \overline{\beta}_0 \\ \overline{\beta}_1 \\ \overline{\beta}_2 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} \overline{\beta}_0 & \overline{\beta}_1 & \overline{\beta}_2 \end{bmatrix}, \qquad d = \begin{bmatrix} \beta_3 \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad d = \begin{bmatrix} \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{v} = Av + bx \ , \ y = cv + dx \ , \ \frac{N(p)}{D(p)} = c(p\text{I} - A)^{-1}b + d = b'(p\text{I} - A')^{-1}c' + d$$

$$v = T\hat{v} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = T^{-1}AT, \ \hat{b} = T^{-1}b, \ \hat{c} = cT \quad , \quad T \text{ não singular}$$