Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Determine, para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação abaixo, a solução forçada para a entrada $x(t) = 5 + \cos(2t)$

$$\ddot{y} + 10y = x$$

2ª Questão: Determine a transformada inversa (bilateral) de Laplace $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para

$$X(s) = 5\frac{(s-4)}{(s-4)^2 + 3^2}, \quad \mathrm{Re}(s) < 4$$

3ª Questão: Determine a transformada (bilateral) inversa de Laplace $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para

$$X(s) = \frac{7s^2 + 44s + 61}{(s+5)^2(s-3)}, \quad -5 < \mathrm{Re}(s) < 3$$

4ª Questão: Determine, para o sinal causal cuja transformada (unilateral) de Laplace é dada por

$$Y(s) = \frac{6s^3 + 24s^2 + 39s + 25}{s(s+1)(s^2 + 4s + 5)}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

a) o valor final $y(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} y(t)$

b) o valor inicial $y(0^+) = \lim_{t\to 0^+} y(t)$

5ª Questão: Determine: a) $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ (transformada de Laplace unilateral) da solução da equação diferencial

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = \exp(-2t)u(t), \quad y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 5$$

b) $y(t)$ (solução da equação para $t \geq 0$)

6ª Questão: Determine a resposta à rampa $y_r(t)$ (isto é, entrada $x(t) = tu(t)$ e condições iniciais nulas) para o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 16\dot{x} + 40x$$

7ª Questão: a) Determine a solução forçada para o sistema linear invariante no tempo dado por

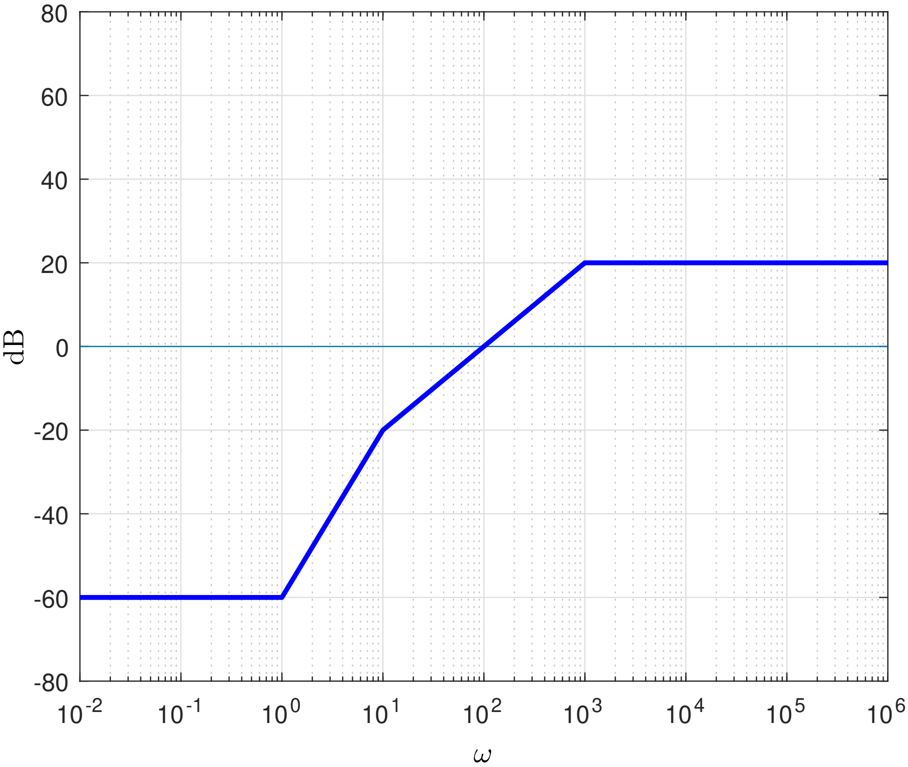
$$(p^2 + 4)y = \cos(2t), \quad p = \frac{d}{dt}$$

b) Determine a solução para $y(0) = \dot{y}(0) = 10$

8ª Questão: Determine a equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução da equação

$$(p + 2)y = t\exp(-2t), \quad y(0) = 5$$

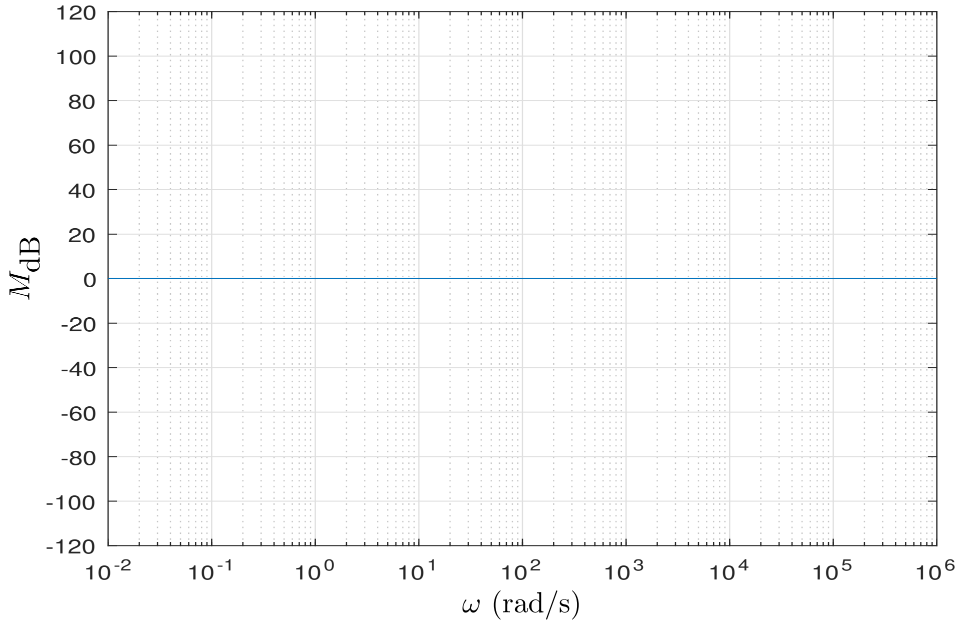
9ª Questão: a) Determine a função de transferência $H(s)$ do sistema linear invariante no tempo de fase mínima cujo diagrama assintótico de Bode (em escala logarítmica) é dado na figura abaixo



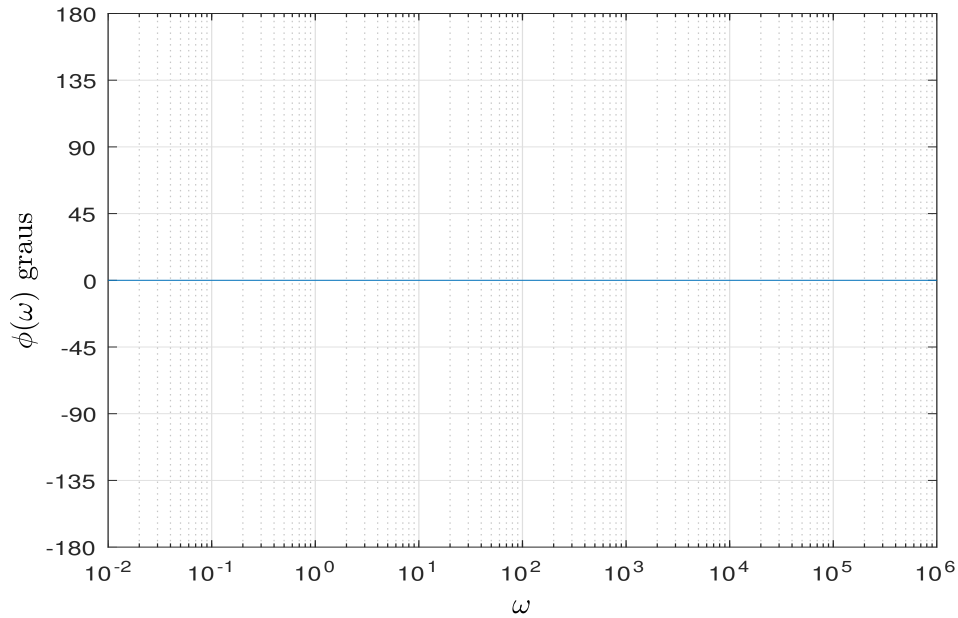
b) Usando o diagrama, determine a amplitude do sinal de saída para uma entrada $x(t) = \cos(1000t)$

10ª Questão: a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{10^5 s}{(s+1)(s+1000)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



Função degrau: $u(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$, Função impulso: $\delta(t) = \dfrac{d}{dt}u(t)$, $u(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta(\beta)d\beta$

$$G_T(t) = u(t+T/2) - u(t-T/2) (\textit{gate} \text{ de largura } T \text{ centrado em } t=0)$$

Sistema linear invariante no tempo: Autofunção $x(t) = \exp(st) \Rightarrow y_f(t) = H(s)\exp(st)$

$h(t)$ real: $x(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)| \cos\big(\omega t + \angle H(j\omega)\big)$
$x(t) = \text{sen}(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)| \text{sen}\big(\omega t + \angle H(j\omega)\big)$

Transformada de Laplace (bilateral):

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad s \in \Omega_h \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = X(s)\Big|_{s=0,\ \ 0\in\Omega_x}$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1,\ s \in \mathbb{C} \quad , \quad \mathcal{L}\{x(t) = x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t)\}\mathcal{L}\{x_2(t)\} \quad , \quad \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = x(t-\tau)\} = X(s)\exp(-s\tau) \quad , \quad \Omega_y = \Omega_x \quad , \quad \mathcal{L}\{\exp(-at)u(t)\} = \frac{1}{s+a} \quad , \quad \text{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s) \quad , \quad -s \in \Omega_x \quad , \quad \mathcal{L}\{-\exp(-at)u(-t)\} = \frac{1}{s+a} \quad , \quad \text{Re}(s+a) < 0$$

$$\mathcal{L}\{\exp(-\alpha t)\cos(\beta t)u(t)\} = \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \, , \mathcal{L}\{\exp(-\alpha t)\text{sen}(\beta t)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \, , \ \text{Re}(s+\alpha) > 0$$

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{t^m}{m!}\exp(-at)u(t)\Big\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}} \ , \ \ \text{Re}(s+a) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\Big\{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\beta)u(\beta)d\beta\Big\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{x(t)\} \quad , \quad \Omega_y \supset \Omega_x \cap \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0\}$$

$$\mathcal{L}\Big\{\frac{t^m}{m!}u(t)\Big\} = \frac{1}{s^{m+1}} \ , \ \text{Re}(s) > 0 \ , \ m \in \mathbb{N} \quad , \quad \mathcal{L}\{y(t) = \exp(-at)x(t)\} = X(s+a) \quad ; \quad \Omega_y = (s+a) \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = t^m x(t)\} = (-1)^m \frac{d^m X(s)}{ds^m} \quad , \quad \Omega_y = \Omega_x \ , \ m \in \mathbb{N} \quad , \quad \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) \quad , \quad \Omega_{\dot{x}} \supset \Omega_x$$

Transformada de Laplace (unilateral):

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0}^{+\infty} x(t)\exp(-st)dt, \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s},\ \text{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0), \quad \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0), \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m \mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1}x^{(k)}(0)$$

$$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to+\infty} sX(s) \ , \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Coeficientes a determinar (equações diferenciais): $py(t) \triangleq \dfrac{d}{dt}y(t)$

$$D(p)y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k f_k(t), \qquad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\ldots$, $t^{r-1}\exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \;\;,\;\; \text{se } \;\bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \;\bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada:} \quad y(t) = y_h(t) + y_f(t) \quad \Rightarrow \quad D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \;,\; D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k g_k(t), \qquad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

Resposta em Frequência: $H(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\exp(-st)dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega}$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a frequência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega) \;\; \text{(sendo log o logaritmo na base 10)}$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (frequência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta frequência

Módulo: assíntotas constantes (valor DC) encontram com assíntotas (crescentes 20dB por década para zeros, ou decrescentes -20dB por década para polos) na frequência de corte ω_c. Pares de zeros e polos complexos são como zeros e polos duplos. Polo $(1/s)$ ou zero s na origem têm apenas a reta decrescente (polo) ou crescente (zero), cruzando 0dB na frequência $\omega_c = 1$.

Fase: polo (zero) com parte real negativa começa em 0o e termina em -90^o $(+90^o)$, passando em -45^o $(+45^o)$ em ω_c. Zero com parte real positiva (zero de fase não m??nima) começa com 180^o e termina em $+90^o$, passando em $+135^o$ em ω_c. Faz-se a ligação por uma reta (uma década para cima e uma década para baixo de ω_c). Pares de zeros e polos complexos são como zeros e polos duplos, porém para $\xi < 0.7$ a ligação é feita por uma reta vertical em ω_c. Polo ou zero na origem contribuem com um valor constante de -90^o (polo) ou $+90^o$ (zero).

Polos complexos: $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \;\; ; \;\; M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$