1ª Questão: Determine $y(t)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 5 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v(t) = \exp(At)v(0), \quad y = c\exp(At)v(0), \quad y(t) = (35 + 30t + 5t^2)\exp(5t)$$

2ª Questão: Determine as matrizes J (forma de Jordan) e Q tais que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3, \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & d & g \\ -a & -d-a & -g-d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo) que produza como saída da equação de estados abaixo a função $y(t) = t^2/5 + 10t\exp(-5t)\big(\cos(2t) - \mathrm{sen}(2t)\big)$

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}\ ,\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0\ ,\ y = \bar{c}\bar{v}$$

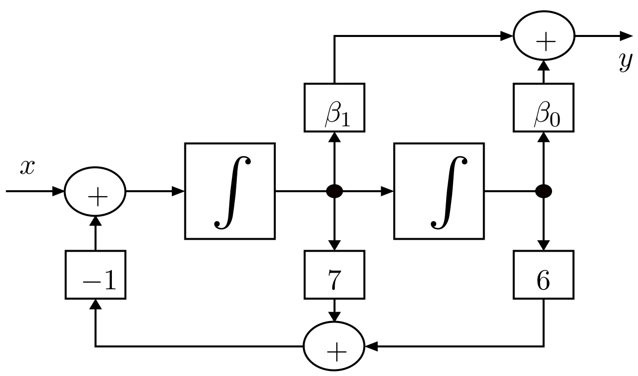
$$\bar{A} = \texttt{blkdiag}\Bigg(J_3(0), \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}\Bigg) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4ª Questão: Determine α_0 e α_1 tais que (I é a matriz identidade 2×2)

$$A^{10} = \alpha_0 I + \alpha_1 A, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{10} = -9I + 10A$$

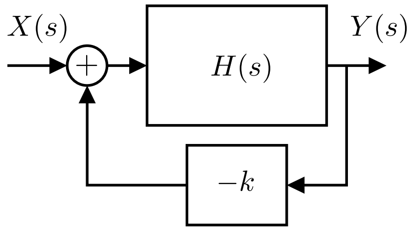
5ª Questão: Determine os valores de β_1 em função de β_0 para que o sistema abaixo não seja observável



$$\mathrm{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c & cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ -6\beta_1 & \beta_0 - 7\beta_1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathrm{Obsv}(A, c)) = \beta_0^2 - 7\beta_1\beta_0 + 6\beta_1^2 = (\beta_0 - \beta_1)(\beta_0 - 6\beta_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \beta_0 = \beta_1, \beta_0 = 6\beta_1$$



6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 4s + 3}, \quad D(s) = s^3 + ks^2 + (4-k)s + 3 \ , \ 1 < k < 3$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados no qual a $\psi(v_1, v_2)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_1, v_2) = (0, 0)$ do sistema não linear dado por

$$\dot{v}_1 = v_1^3 v_2^2 - 5v_1 v_2^2, \quad \dot{v}_2 = -3v_1^2 v_2 + v_1^2 v_2^3$$

Tem-se $\psi(v_1, v_2) > 0$, $\forall (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ e

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(v_1, v_2) &= v_1 \dot{v}_1 + v_2 \dot{v}_2 = v_1(v_1^3 v_2^2 - 5v_1 v_2^2) + v_2(-3v_1^2 v_2 + v_1^2 v_2^3) \\ &= v_1^4 v_2^2 - 5v_1^2 v_2^2 - 3v_1^2 v_2^2 + v_1^2 v_2^4 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 - 8)v_1^2 v_2^2 < 0, \forall (v_1, v_2) \neq (0,0) \in \Omega, \quad \Omega = \big\{(v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 < 8\big\}\end{aligned}$$

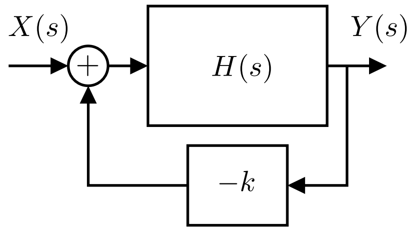
ou ainda

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(v_1, v_2) &= v_1^4 v_2^2 - 5v_1^2 v_2^2 - 3v_1^2 v_2^2 + v_1^2 v_2^4 \\ &= (v_1^2 - 5)v_1^2 v_2^2 + (v_2^2 - 3)v_1^2 v_2^2 < 0, \forall (v_1, v_2) \neq (0,0) \in \Omega, \quad \Omega = \big\{(v_1, v_2) : (v_1^2 < 5) \cap (v_2^2 < 3)\big\}\end{aligned}$$

8ª Questão: Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo $\dot{v} = Av$ em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

a) Estável (autovalores com parte real nula em blocos de Jordan de tamanho mínimo)
b) Assintoticamente estável (parte real negativa dos autovalores)

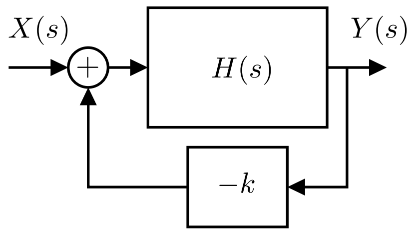


9ª Questão: Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para

$$H(s) = \frac{s^2}{(s-6)(s^2+4)^2(s+2)(s+4)(s+10)}$$

Eixo real: $[-10, -4], [-2, 6]$, Número: $\eta = 8 - 2 = 6$

Ângulos: $\pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{6}$, Encontro: $\frac{1}{6}(-10 - 4 - 2 + 6 - (0)) = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$



10ª Questão: Determine os valores de s nos cruzamentos com o eixo real para o sistema mostrado na figura ao lado com

$$H(s) = \frac{s^2 + 8s + 12}{s^2 - 8s + 12}$$

Nos cruzamentos com o eixo real tem-se $D(s)\dot{N}(s) - N(s)\dot{D}(s) = 0$

$$(s^2 - 8s + 12)(2s + 8) - (s^2 + 8s + 12)(2s - 8) = -16s^2 + 192 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm\sqrt{12}$$