Nome: .... **RA:** ....

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

1ª Questão: Determine $y(t)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 5 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2ª Questão: Determine as matrizes J (forma de Jordan) e Q tais que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

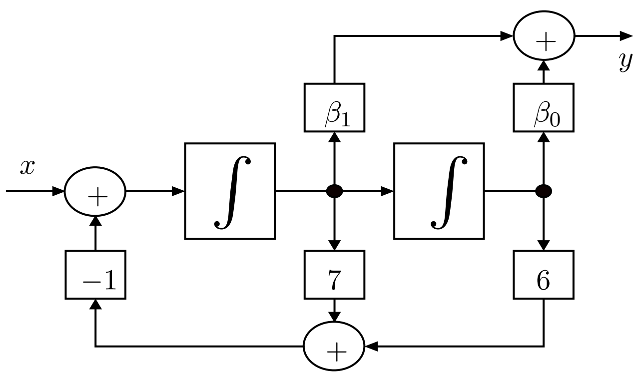
3ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo) que produza como saída da equação de estados abaixo a função $y(t) = t^2/5 + 10t\exp(-5t)\big(\cos(2t) - \mathrm{sen}(2t)\big)$

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}\ ,\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0\ ,\ y = \bar{c}\bar{v}$$

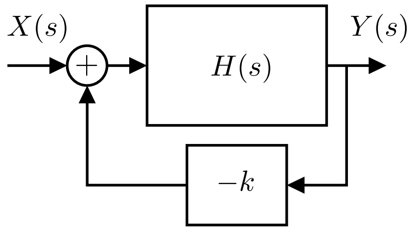
4ª Questão: Determine α_0 e α_1 tais que (I é a matriz identidade 2×2)

$$A^{10} = \alpha_0 I + \alpha_1 A, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5ª Questão: Determine os valores de β_1 em função de β_0 para que o sistema abaixo não seja observável



6ª Questão: Determine o intervalo para $k \in \mathbb{R}$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 4s + 3}$$

7ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados no qual a $\psi(v_1, v_2)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_1, v_2) = (0, 0)$ do sistema não linear dado por

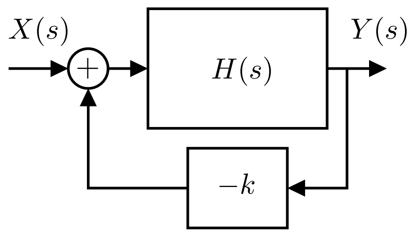
$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1^3 v_2^2 - 5v_1 v_2^2 \\ \dot{v}_2 &= -3v_1^2 v_2 + v_1^2 v_2^3 \end{aligned}$$

8ª Questão: Classifique os sistemas lineares invariantes no tempo $\dot{v} = Av$ em termos de estabilidade da origem (assintoticamente estável, estável ou instável), justificando.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

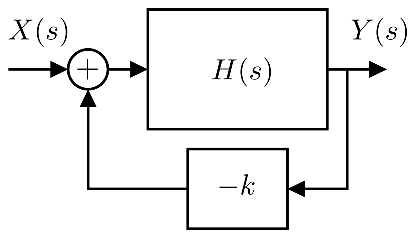
b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

9ª Questão: Determine os intervalos sobre o eixo real nos quais existe lugar das raízes, o número de assíntotas, os ângulos das assíntotas e o ponto de encontro das assíntotas no eixo real para



$$H(s) = \frac{s^2}{(s-6)(s^2+4)^2(s+2)(s+4)(s+10)}$$

10ª Questão: Determine os valores de s nos cruzamentos com o eixo real para o sistema mostrado na figura ao lado com



$$H(s) = \frac{s^2 + 8s + 12}{s^2 - 8s + 12}$$

Solução da equação de estado

$$y(t) = c\exp(At)v_0 + c\big(\exp(At)u(t)\big) * (bx(t)) + dx(t),\ Y(s) = c(s\mathrm{I}-A)^{-1}v_0 + \big(c(s\mathrm{I}-A)^{-1}b + d\big)X(s)$$

$$\text{Cayley-Hamilton:}\quad \Delta(\lambda) = \det(s\mathrm{I}-A) = 0 \ \Rightarrow\ \Delta(A) = 0$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1}\rho_i\lambda^i\ ,\ \Delta(\lambda) = 0 \ \Rightarrow\ f(A) = \sum_{i=0}^{n-1}\rho_i A^i\ ,\ f\big(\mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_N)\big) = \mathrm{diag}\big(f(A_1),\ldots,f(A_N)\big)$$

$$\text{Bloco de Jordan: } J_k(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma \end{bmatrix},\ f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot f(\lambda) & \cdots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \cdots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

$$\text{Forma modal: } M = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix},\ \Delta(\lambda) = (\lambda-\sigma)^2 + \omega^2,\quad \exp(Mt) = \exp(\sigma t)\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\mathrm{sen}(\omega t) \\ \mathrm{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$\text{Forma modal de Jordan: } \begin{bmatrix} M & \mathrm{I} & \cdots & 0 \\ 0 & M & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \end{bmatrix},\quad \exp\left(\begin{bmatrix} M & \mathrm{I} \\ 0 & M \end{bmatrix} t\right) = t\exp(\sigma t)\begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\mathrm{sen}(\omega t) \\ \mathrm{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

Forma de Jordan de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\nu(M_\lambda) = n - \mathrm{rank}(M_\lambda)$ (dimensão do espaço nulo de $M_\lambda = A - \lambda\mathrm{I}$ = número de blocos de Jordan associados a λ = multiplicidade geométrica do autovalor λ): $AQ = QJ$, $J = Q^{-1}AQ$, Q formada por autovetores linearmente independentes e autovetores generalizados.

$$\dot v = Av + bx\ ,\ y = cv + dx, v(0)\quad ,\ \text{para } x \text{ solução de } x = \bar c\bar v\ ,\ \dot{\bar v} = \bar A\bar v, \bar v(0)$$

$$\Rightarrow\quad \text{Sistema autônomo aumentado: } \begin{bmatrix} \dot v \\ \dot{\bar v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar c \\ 0 & \bar A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ \bar v \end{bmatrix}\quad ,\ \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar v_0 \end{bmatrix}\quad ,\ y = \begin{bmatrix} c & d\bar c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ \bar v \end{bmatrix}$$

$M_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log M(\omega)$ sendo log o logaritmo na base 10

Controlabilidade e Observabilidade: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Controlável se e somente se:

$$rank\big(\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix}\big) = n,\quad \text{ou}\ rank\big(\begin{bmatrix} A-\lambda I & b \end{bmatrix}\big) = n,\quad \forall\lambda \text{ autovalor}$$

Observável se e somente se:

$$rank\left(\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n,\quad \text{ou}\ rank\left(\begin{bmatrix} A-\lambda I \\ c \end{bmatrix}\right) = n,\quad \forall\lambda \text{ autovalor}$$

Decomposição canônica: $\bar v = Pv$
Se *rank* de $\mathrm{Ctrb}(A,b) = r < n$, P^{-1} é formada por colunas de 1 a r LI de $\mathrm{Ctrb}(A,b)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar v}_c \\ \dot{\bar v}_{\bar c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar A_c & \bar A_{12} \\ 0 & \bar A_{\bar c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar v_c \\ \bar v_{\bar c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar b_c \\ 0 \end{bmatrix} x\quad ,\ y = \begin{bmatrix} \bar c_c & \bar c_{\bar c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar v_c \\ \bar v_{\bar c} \end{bmatrix} + \bar d x$$

Se *rank* de $\mathrm{Obsv}(A,c) = r < n$, P é formada por linhas de 1 a r LI de $\mathrm{Obsv}(A,c)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar v}_o \\ \dot{\bar v}_{\bar o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar A_o & 0 \\ \bar A_{21} & \bar A_{\bar o} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar v_o \\ \bar v_{\bar o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar b_o \\ \bar b_{\bar o} \end{bmatrix} x\quad ,\ y = \begin{bmatrix} \bar c_o & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar v_o \\ \bar v_{\bar o} \end{bmatrix} + \bar d x$$

Estabilidade por Lyapunov: Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(v) > 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\} \ \text{ e } \ \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Lyapunov (SLIT): A solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$, $\forall Q = Q' > 0$, é única, simétrica e definida positiva SSE todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa ($\equiv$ assintoticamente estável)

Introdução à realimentação: Sensibilidade de $f(x, y)$ em relação a x: $\dfrac{x}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \ \Rightarrow \ D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r s^r \ , \ \alpha_m = 1 \quad , \quad N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os polos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \to +\infty$.

3) Condição de fase: $\displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) = \pi$

sendo $\phi_r(s) = \angle(s-\lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo λ_r até o ponto s do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s-\gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero γ_r até o ponto s do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $\displaystyle k = \Big(\prod_{r=1}^{m} |s - \lambda_r|\Big) / \Big(\prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r|\Big)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de polos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos polos: $\displaystyle \phi_i(s)\Big|_{s\approx\lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{m} \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\displaystyle \varphi_i(s)\Big|_{s\approx\gamma_i} = \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) - \sum_{r=1, r\neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas η é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\dfrac{\pi(1 + 2r)}{m - \ell} \quad , \quad \beta_\ell > 0 \quad , \quad r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\displaystyle \frac{1}{\eta}\left(\sum_{r=1}^{m} \mathrm{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \mathrm{Re}(\gamma_r)\right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s)+kN(s) = 0$