1ª Questão: Determine, para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação abaixo, a solução forçada $y_f[n]$ para a entrada $x[n] = 2 + (2/j)^n, \ \ j = \sqrt{-1}$

$$y[n+2] + 3y[n] = x[n+2]$$

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2+3}, \quad y_f[n] = H(1)2 + H(2/j)(2/j)^n = \frac{1}{2} + 4(2/j)^n$$

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{15z^2}{(z+3)^3}, \quad |z| < 3$$

$$Y(z) = X(z^{-1}) = \frac{15z^{-2}}{(z^{-1}+3)^3} = \frac{(5/9)z}{(z+(1/3))^3}, \ |z| > 1/3$$

$$y[n] = (5/9)\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right)(-1/3)^{n-2}u[n] = (5/9)\frac{n(n-1)}{2}(-1/3)^{n-2}u[n] = 5\frac{n(n-1)}{2}(-1/3)^n u[n]$$

$$\Rightarrow x[n] = y[-n] = (5/2)n(n+1)(-3)^n u[-n]$$

3ª Questão: Determine, para a sequência cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{(3z^2+5)(2z+2)(2-z)}{(z^2+1)(5z-2)(7z+3)} \ , \ |z| > 1$$

a) $x[0]$ b) $x[+\infty]$

$$x[0] = -6/35, \quad x[\infty] = \nexists$$

4ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = X(z) = \frac{-4}{z-5}$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$ b) $\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_k k^2 \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

$$\Pr\{\mathbb{X} = 1\} = \frac{d}{dz}X(z)\Big|_{z=0} = \frac{4}{(z-5)^2}\Big|_{z=0} = \frac{4}{25}$$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_k k^2 \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)^2 X(z)\Big|_{z=1} = z\left(\frac{-4z-20}{(z-5)^3}\right)\Big|_{z=1} = \frac{3}{8}$$

5ª Questão: Determine: a) $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução $y[n]$, $n \geq 0$, da equação a diferenças abaixo

$$y[n+1] - 3y[n] = 2, \quad y[0] = 9$$

b) $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

$$Y(z) = \frac{z9}{z-3} + \frac{2z}{(z-3)(z-1)} = \frac{10z}{z-3} - \frac{z}{z-1}, \quad y[n] = \big(10(3)^n - 1\big)u[n]$$

6ª Questão: Determine a resposta ao impulso $h[n]$, $n \geq 0$ (condições iniciais nulas) do sistema linear discreto invariante no tempo descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] - 4y[n] = 4x[n]$$

$$H(z) = \frac{4}{(z+2)(z-2)} = -1 + \frac{(1/2)z}{z+2} + \frac{(1/2)z}{z-2}, \quad h[n] = -\delta[n] + \big((1/2)(-2)^n + (1/2)(2)^n\big)u[n]$$

ou, alternativamente,

$$H(z) = \frac{4}{(z+2)(z-2)} = \frac{-1}{z+2} + \frac{1}{z-2} = z^{-1}\left(\frac{-z}{z+2} + \frac{z}{z-2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad h[n] = \big(-(-2)^{n-1} + (2)^{n-1}\big)u[n-1] = \big((1/2)(-2)^n + (1/2)(2)^n\big)u[n-1]$$

7ª Questão: Determine a solução da equação a diferenças

$$y[n+1] = 2y[n] + 4n, \quad y[1] = 2, \quad y[n] = \underbrace{-4 - 4n}_{y_f[n]} + 5(2)^n$$

8ª Questão: Determine, para a equação a diferenças abaixo

$$y[n+1] - y[n] = 6n^2 + 3, \quad y[0] = 4$$

a) A parcela forçada da solução b) A solução

$$y[n] = \underbrace{2n^3 - 3n^2 + 4n}_{y_f[n]} + 4$$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in \mathbb{R}^2$ do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= (v_1+2)(v_2+2) - 2x \\ \dot{v}_2 &= (v_1+1)(v_2+3) + x \end{aligned}$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx, \quad v \in \mathbb{R}^2$$

e avalie o comportamento (assintoticamente estável, instável ou indeterminado) a partir da aproximação linear

$$(-2,-3), \quad (-1,-2)$$

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} v_2+2 & v_1+2 \\ v_2+3 & v_1+1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$(-2,-3): \ \dot{v} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x, \text{ assint. estável, autovalores c/ parte real negativa}$$

$$(-1,-2): \ \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x, \text{ instável, autovalor c/ parte real positiva}$$

10ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$(p^4 - 3p^3 + 2p^2 - 10p + 4)y(t) = (3p^4 - 4p^3 + 5p^2 - p + 8)x(t), \quad p = \frac{d}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 10 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -4 & 29 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$