

Nome:

RA:

Obs.: Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

1ª Questão: Determine, para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação abaixo, a solução forçada para a entrada $x(t) = 10 + \text{sen}(t)$

$$\ddot{y} - y = x$$

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2ª Questão: Determine a transformada inversa (bilateral) de Laplace $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para

$$X(s) = -3 \frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2} + 5 \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}, \quad \text{Re}(s) < -1$$

3ª Questão: Determine a transformada (bilateral) inversa de Laplace $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para

$$X(s) = \frac{2s^2 + 7s - 15}{(s-1)^2(s-4)}, \quad 1 < \text{Re}(s) < 4$$

4ª Questão: Determine, para o sinal causal cuja transformada (unilateral) de Laplace é dada por

$$Y(s) = \frac{(2s+1)(s-2)(5s-6)}{s(s^2+2s+2)(s+4)}$$

a) o valor final $y(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$

b) o valor inicial $y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$

5ª Questão: Determine: a) $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ (transformada de Laplace unilateral) da solução da equação diferencial

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = \exp(-t)u(t), \quad y(0) = 4, \quad \dot{y}(0) = 10$$

b) $y(t)$ (solução da equação para $t \geq 0$)

6ª Questão: Determine a resposta à rampa $y_r(t)$ (isto é, entrada $x(t) = tu(t)$ e condições iniciais nulas) para o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y = 96\dot{x} + 160x$$

7ª Questão: a) Determine a solução forçada para o sistema linear invariante no tempo dado por

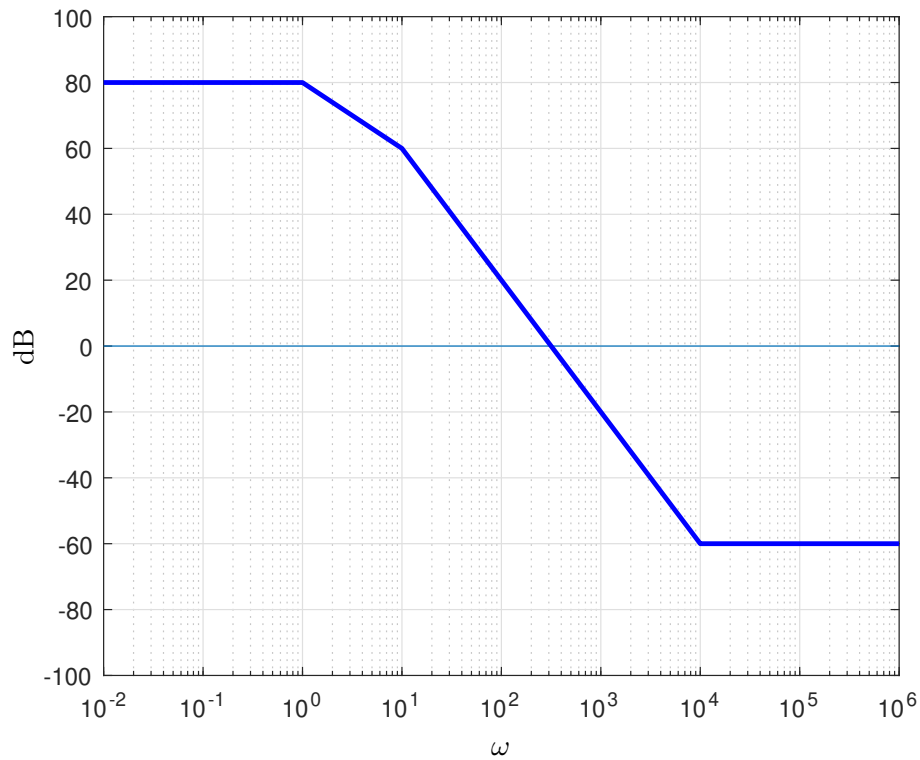
$$(p^2 + 9)y = 18 \operatorname{sen}(3t), \quad p = \frac{d}{dt}$$

b) Determine a solução para $y(0) = \dot{y}(0) = 0$

8ª Questão: Determine a equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução da equação

$$p(p+1)y = t^2 + 2, \quad y(0) = -2, \quad \dot{y}(0) = 4$$

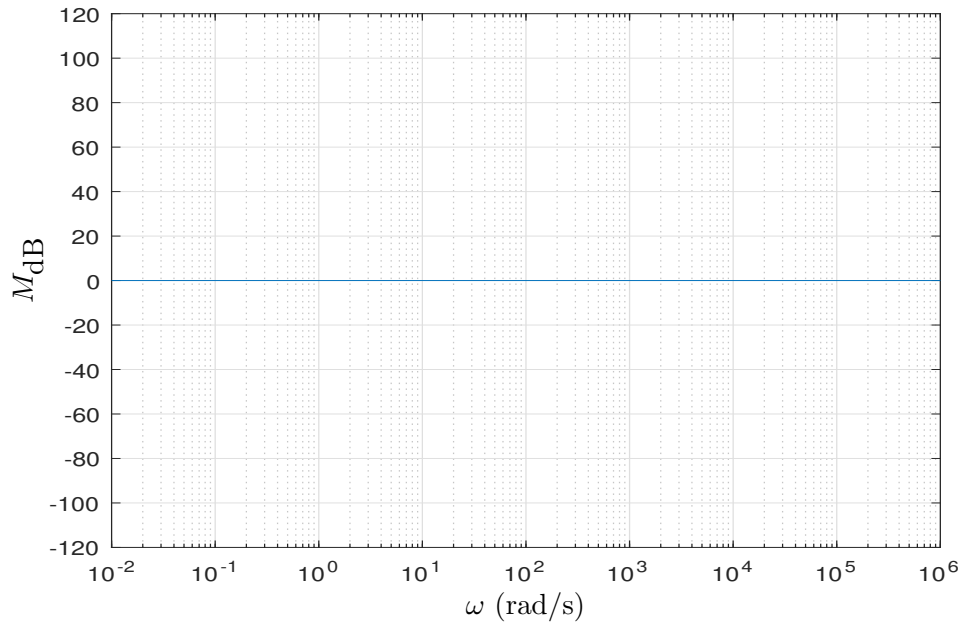
9ª Questão: a) Determine a função de transferência $H(s)$ do sistema linear invariante no tempo de fase mínima cujo diagrama assintótico de Bode (em escala logarítmica) é dado na figura abaixo



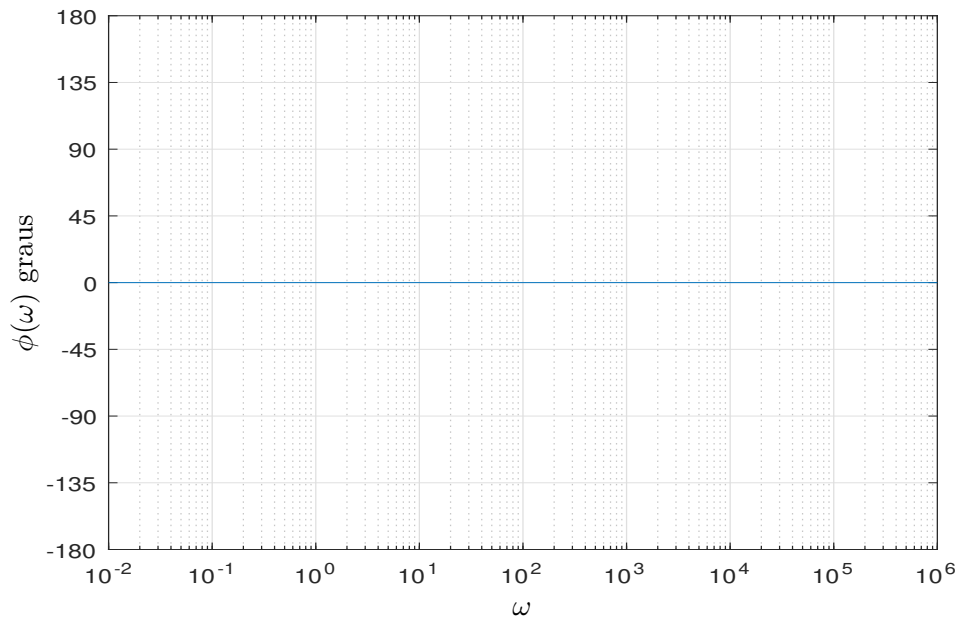
b) Usando o diagrama, determine a amplitude do sinal de saída para uma entrada $x(t) = \text{sen}(1000t)$

10ª Questão: a) Esboce as assíntotas do módulo (diagrama de Bode em escala logarítmica) do sistema linear invariante no tempo descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{10^3(s + 100)}{s(s + 10000)}$$



b) Esboce as assíntotas da fase (diagrama de Bode em graus) do sistema.



Função degrau: $u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$, Função impulso: $\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$, $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\beta)d\beta$

$$G_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2) \text{ (gate de largura } T \text{ centrado em } t = 0)$$

Sistema linear invariante no tempo: Autofunção $x(t) = \exp(st) \Rightarrow y_f(t) = H(s) \exp(st)$

$h(t)$ real: $x(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$

$$x(t) = \sin(\omega t) \Rightarrow y_f(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega))$$

Transformada de Laplace (bilateral):

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-st) dt, \quad s \in \Omega_h, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = X(s) \Big|_{s=0}, \quad 0 \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}\{x(t) = x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t)\} \mathcal{L}\{x_2(t)\}, \quad \Omega_x = \Omega_{x_1} \cap \Omega_{x_2}$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = x(t - \tau)\} = X(s) \exp(-s\tau), \quad \Omega_y = \Omega_x, \quad \mathcal{L}\{\exp(-at)u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}(s+a) > 0$$

$$\mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s), \quad -s \in \Omega_x, \quad \mathcal{L}\{-\exp(-at)u(-t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}(s+a) < 0$$

$$\mathcal{L}\{\exp(-\alpha t) \cos(\beta t) u(t)\} = \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}, \quad \mathcal{L}\{\exp(-\alpha t) \sin(\beta t) u(t)\} = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}, \quad \operatorname{Re}(s+\alpha) > 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} \exp(-at) u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}, \quad \operatorname{Re}(s+a) > 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\left\{y(t) = \int_{-\infty}^t x(\beta) u(\beta) d\beta\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{x(t)\}, \quad \Omega_y \supset \Omega_x \cap \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} u(t)\right\} = \frac{1}{s^{m+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\{y(t) = \exp(-at)x(t)\} = X(s+a); \quad \Omega_y = (s+a) \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\{y(t) = t^m x(t)\} = (-1)^m \frac{d^m X(s)}{ds^m}, \quad \Omega_y = \Omega_x, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s), \quad \Omega_{\dot{x}} \supset \Omega_x$$

Transformada de Laplace (unilateral):

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) \exp(-st) dt, \quad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = s\mathcal{L}\{x(t)\} - x(0), \quad \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - sx(0) - \dot{x}(0), \quad s \in \Omega_x$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{(m)}(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m}\right\} = s^m \mathcal{L}\{x(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} x^{(k)}(0)$$

$$x(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

Coefficientes a determinar (equações diferenciais): $py(t) \triangleq \frac{d}{dt}y(t)$

$$D(p)y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = \sum_{k=1}^m a_k f_k(t), \quad f_k(t) \text{ modos próprios (considerando multiplicidades)}$$

Se λ é raiz de multiplicidade r de $D(\lambda)$, então $\exp(\lambda t)$, $t \exp(\lambda t)$, \dots , $t^{r-1} \exp(\lambda t)$ são modos próprios.

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad , \quad \text{se } \bar{D}(p)x(t) = 0 \text{ então } \bar{D}(p)D(p)y(t) = 0$$

$$\text{Solução forçada: } y(t) = y_h(t) + y_f(t) \Rightarrow D(p)y_f(t) = N(p)x(t) \quad , \quad D(p)y_h(t) = 0$$

$$y_f(t) = \sum_{k=1}^m b_k g_k(t), \quad g_k(t) \text{ modos forçados (considerando multiplicidades e ressonâncias)}$$

$$\text{Resposta em Frequência: } H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-st) dt \quad , \quad H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

Diagramas assintóticos de Bode: gráficos do módulo (em dB) e da fase (em graus) versus a frequência em escala logarítmica.

$$M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log M(\omega) \quad (\text{sendo } \log \text{ o logaritmo na base } 10)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \Rightarrow M_{\text{dB}}(\omega) = M_{1\text{dB}}(\omega) + M_{2\text{dB}}(\omega) \quad ; \quad \phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)$$

ω_c (frequência de corte): encontro das assíntotas de baixa e alta frequência

Módulo: assíntotas constantes (valor DC) encontram com assíntotas (crescentes 20dB por década para zeros, ou decrescentes -20dB por década para polos) na frequência de corte ω_c . Pares de zeros e polos complexos são como zeros e polos duplos. Polo ($1/s$) ou zero s na origem têm apenas a reta decrescente (polo) ou crescente (zero), cruzando 0dB na frequência $\omega_c = 1$.

Fase: polo (zero) com parte real negativa começa em 0° e termina em -90° ($+90^\circ$), passando em -45° ($+45^\circ$) em ω_c . Zero com parte real positiva (zero de fase não mínima) começa com 180° e termina em $+90^\circ$, passando em $+135^\circ$ em ω_c . Faz-se a ligação por uma reta (uma década para cima e uma década para baixo de ω_c). Pares de zeros e polos complexos são como zeros e polos duplos, porém para $\xi < 0.7$ a ligação é feita por uma reta vertical em ω_c . Polo ou zero na origem contribuem com um valor constante de -90° (polo) ou $+90^\circ$ (zero).

Polos complexos: $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow \lambda_2^* = \lambda_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{pico } (0 < \xi < 1/\sqrt{2}): \quad \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \quad ; \quad M(\omega_r) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$