1ª Questão: Determine a solução forçada para a entrada $x[n] = 1 + 2^n$ do sistema linear discreto invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada por

$$h[n] = 4n(-2)^n u[n]$$

$$H(z) = \frac{-8z}{(z+2)^2}, \quad y_f[n] = 1H(1) + H(2)2^n = -\frac{8}{9} - 2^n$$

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{-4z^3 - 11z^2 + 9z}{z^3 + 9z^2 + 24z + 20} = \frac{-4z^3 - 11z^2 + 9z}{(z+2)^2(z+5)}, \quad 2 < |z| < 5$$

$$X(z) = \frac{5z}{(z+2)^2} + \frac{-4z}{z+5}, \quad 2 < |z| < 4$$

$$\Rightarrow x[n] = 5n(-2)^{n-1}u[n] + 4(-5)^n u[-n-1]$$

3ª Questão: Para a sequência $x[n] = 10n8^{-n}u[n]$, determine

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} kx[k]$$

$$X(z) = 10\frac{(1/8)z}{(z-1/8)^2} = \frac{80z}{(8z-1)^2}, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kx[k] = \left(-z\frac{d}{dz}\right)X(z)\Big|_{z=1} = -z\left(\frac{-640z-80}{(8z-1)^3}\right)\Big|_{z=1} = \frac{720}{7^3} = \frac{720}{343}$$

4ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = X(z) = \frac{8-5z}{3z^2 - 16z + 16} = \frac{8-5z}{(z-4)(3z-4)} \quad , \quad |z| < 4/3$$

Determine:
a) $\Pr\{\mathbb{X} = 0\} = 1/2$ b) $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)\frac{8-5z}{3z^2-16z+16}\Big|_{z=1} = 5/3$$

5ª Questão: Determine $H(z)$, isto é, a transformada Z da resposta ao impulso (causal) $h[n]$ do sistema descrito pela equação a diferenças

$$y[n+2] + 3y[n+1] + 2y[n] = 4x[n+2] + 7x[n+1] + 6x[n]$$

b) Determine $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$ (condições iniciais nulas)

$$(p^2 + 3p + 2)y[n] = (4p^2 + 7p + 6)x[n], \quad H(z) = \frac{N(p)}{D(p)}\Big|_{p=z} = \frac{4z^2 + 7z + 6}{z^2 + 3z + 2} = \frac{4z^2 + 7z + 6}{(z+1)(z+2)}$$

$$H(z) = 3 - \frac{3z}{z+1} + \frac{4z}{z+2}, \quad h[n] = 3\delta[n] + \big(-3(-1)^n + 4(-2)^n\big)u[n]$$

6ª Questão: a) Determine $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução da equação a diferenças abaixo

$$(p^2+2p-3)y[n] = y[n+2]+2y[n+1]-3y[n] = 0, \qquad y[0]=4,\ y[1]=12$$

b) Determine a solução $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$

$$Y(z) = \frac{4z^2+20z}{(z-1)(z+3)}, \quad y[n] = \big(6(1)^n - 2(-3)^n\big)u[n]$$

7ª Questão: a) Determine a solução forçada de

$$y[n+2]-4y[n+1]+3y[n] = n+1$$

$$y_f[n] = \frac{1}{8}\Big(-2n^2-4n\Big) = -\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n$$

b) Determine a solução de

$$y[n+2]-4y[n+1]+3y[n] = n+1 \ \ ,\ \ y[0]=1\ ,\ y[1]=1$$

$$y[n] = \frac{1}{8}\Big(-2n^2-4n+5+3^{n+1}\Big) = -\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{3}{8}3^n + \frac{5}{8}$$

8ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = (n+1)(-1)^n + n^2$$

$\bar{D}(p) = (p+1)^2(p-1)^3, \quad (p^5-p^4-2p^3+2p^2+p-1)y[n] = 0,\ y[0]=1, y[1]=-1, y[2]=7, y[3]=5, y[4]=21$

9ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio para $x=0$ do sistema dinâmico não linear descrito por

$$\dot{v} = v(v^2-4)+3x^2$$

b) Avalie o comportamento (assintoticamente estável ou instável) em torno de cada ponto de equilíbrio usando uma aproximação linear

Pontos de equilíbrio: $(\bar{v}=0),\ (\bar{v}=2),\ (\bar{v}=-2)$

Aproximação linear: $\dot{v} = \big[3v^2-4\big]\, v$

$$(\bar{v}=0) : \dot{v} = -4v \text{ (assint. estável)}, \quad (\bar{v}=\pm 2) : \dot{v} = 8v \text{ (instável)}$$

10ª Questão: Determine uma realização (A,b,c,d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\ddot{\ddot{y}} - 4\dddot{y} + 5\ddot{y} - 7\dot{y} + 8y = 2\ddot{\ddot{x}} - 3\dddot{x} + 7\ddot{x} - 14\dot{x} + 18x$$

$$(p^4-4p^3+5p^2-7p+8)y(t) = (2p^4-3p^3+7p^2-14p+18)x(t),\ p = \frac{d}{dt}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 7 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$