EA616A — Análise Linear de Sistemas
Notação
Transformada de Laplace
Sistema Linear Invariante no Tempo
Introdução

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Sinais contínuos

- $x(t)$, $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \in (-\infty, +\infty)$

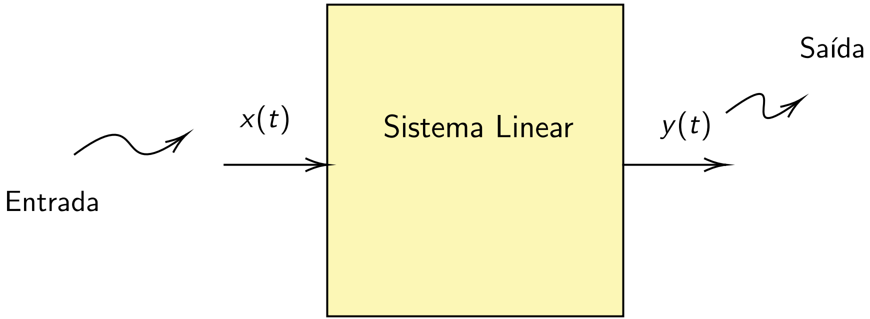
- Degrau $u(t)$ e impulso $\delta(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t), \quad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\beta)d\beta$$

- Propriedade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0), \quad \forall f(t) \text{ contínua em } t = 0$$



$$y_1 = \mathscr{G}\{x_1\}, \quad y_2 = \mathscr{G}\{x_2\} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{G}\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Sistema linear invariante no tempo (SLIT)

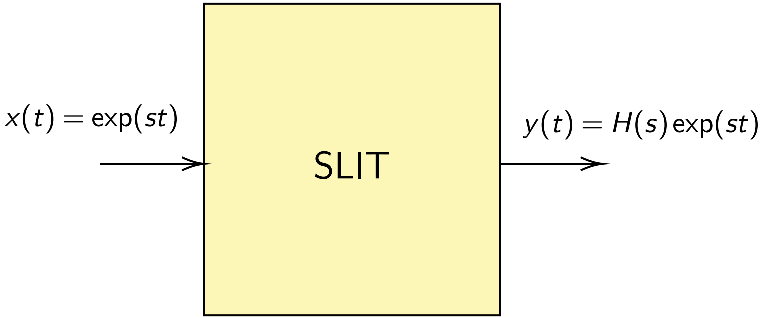
- Pode ser descrito por equação diferencial linear (ordinária a coeficientes constantes), como por exemplo

$$\dddot{y} + 8\ddot{y} + 5\dot{y} + 3y = 4\ddot{x} + 8\dot{x} + x$$

- Notação $p = \dfrac{d}{dt}$, $py = \dot{y}$, $p^2 y = \ddot{y}$

$$\underbrace{(p^3 + 8p^2 + 5p + 3)}_{D(p)} y = \underbrace{(4p^2 + 8p + 1)}_{N(p)} x$$

$D(p)$: polinômio mônico (coeficiente do termo de maior grau igual a 1)



$$s \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad H(s) \in \mathbb{C}$$

$H(s)$: ganho complexo equivalente ou função de transferência

$H(s)$ a partir da auto-função $\exp(st)$

- Exemplo

$$\dddot{y} + 8\ddot{y} + 5\dot{y} + 3y = 4\ddot{x} + 8\dot{x} + x, \quad (p^3 + 8p^2 + 5p + 3)y = (4p^2 + 8p + 1)x$$

$$x(t) = \exp(st) \quad \Rightarrow \quad y(t) = H(s)\exp(st)$$

$$(s^3 + 8s^2 + 5s + 3)H(s)\exp(st) = (4s^2 + 8s + 1)\exp(st)$$

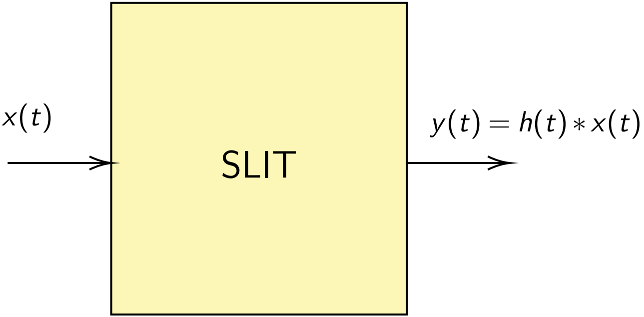
$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{4s^2 + 8s + 1}{s^3 + 8s^2 + 5s + 3}$$

- No caso geral

$$H(s) = \frac{N(p)}{D(p)}\bigg|_{p=s}$$

SLIT: Teorema

- A saída $y(t)$ do SLIT para uma entrada $x(t)$ é dada pela convolução da entrada com a resposta ao impulso do sistema.



$h(t)$: resposta ao impulso

- Portanto, para $x(t) = \exp(st)$, tem-se

$$y(t) = h(t) * \exp(st) = \exp(st) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) \exp(-s\beta) d\beta}_{= H(s), \quad s \in \Omega_h}$$

- Transformada (bilateral) de Laplace da função resposta ao impulso

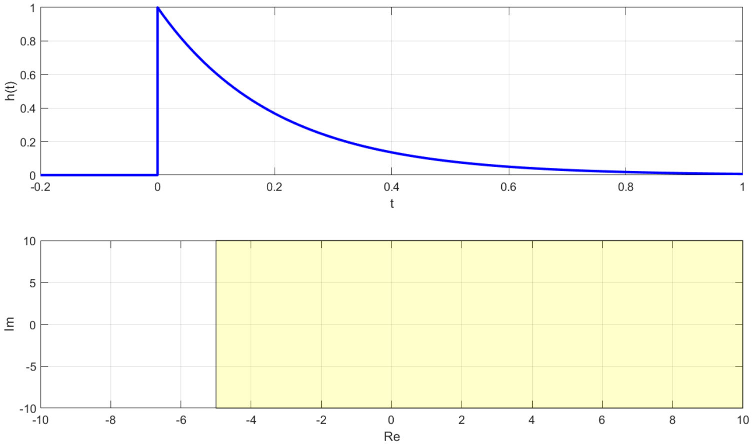
$$H(s) = \mathscr{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) \exp(-s\beta) d\beta, \quad s \in \Omega_h$$

Exemplo

- A transformada de Laplace de $x(t) = \exp(-5t)u(t)$ e o domínio de existência associado Ω_x podem ser computados a partir da definição.

$$
\begin{aligned}
X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-5t)u(t)\exp(-st)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-(s+5)t\big)u(t)dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} \exp\big(-(s+5)t\big)dt \\
&= -\frac{1}{s+5}\exp\big(-(s+5)t\big)\Big|_{t=0}^{t\to+\infty} \\
&= -\frac{1}{s+5}\Bigg(\underbrace{\lim_{t\to+\infty}\exp\big(-(s+5)t\big)}_{=0,\ \mathrm{Re}(s+5)>0} - 1\Bigg) \\
&= \frac{1}{s+5}, \quad s \in \Omega_x, \quad \Omega_x = \big\{s : \mathrm{Re}(s) > -5\big\}
\end{aligned}
$$

$$\mathscr{L}\left\{\exp(-5t)u(t)\right\} = \frac{1}{s+5}, \quad \mathrm{Re}(s) > -5$$



$H(s)$ — função de transferência

- A partir de uma equação diferencial, p. ex.,

$$(p^2 + 7p + 10)y = (p + 5)x$$

obtém-se (com o conceito de auto-função) a função de transferência $H(s)$

$$H(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 7s + 10}$$

porém o domínio de existência (associado à transformada de Laplace da resposta ao impulso) depende de considerar-se a solução causal (que evolui de um ponto inicial, por exemplo, $t = 0$, para $t \to +\infty$) ou a anti-causal