EA616A — Análise Linear de Sistemas
Transformada Z
Sistema Linear Invariante no Tempo
Introdução

Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

Sinais discretos (sequências)

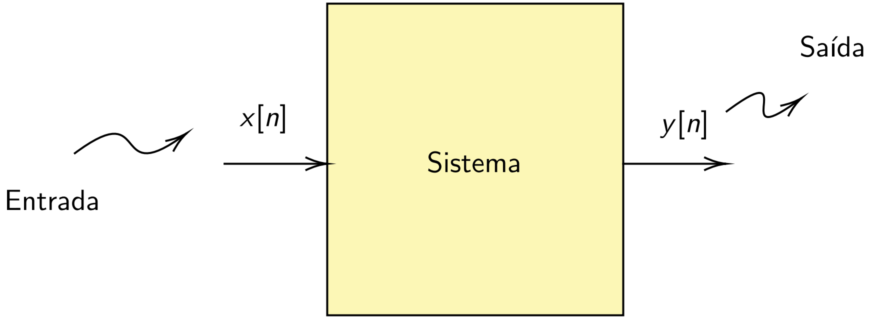
- $x[n]$, $y[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \in (-\infty, +\infty)$

- Degrau $u[n]$ e impulso $\delta[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 0 & , \quad n < 0 \\ 1 & , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

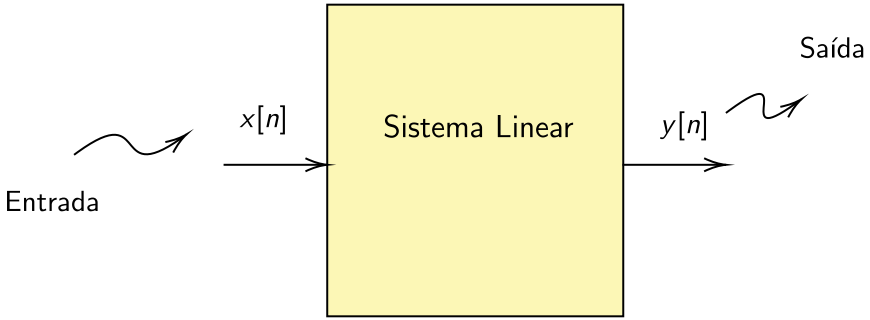
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1], \quad u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

- Sinais discretos $x[n]$ só existem para n inteiro



$$y[n] = \mathscr{G}\{x[n]\}, \quad n \in \mathscr{Z}$$

Sistema linear (discreto)



$$y_1 = \mathscr{G}\{x_1\}, \quad y_2 = \mathscr{G}\{x_2\} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{G}\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Sistema linear invariante no tempo (SLIT — discreto)

- Pode ser descrito por equação a diferenças, como por exemplo

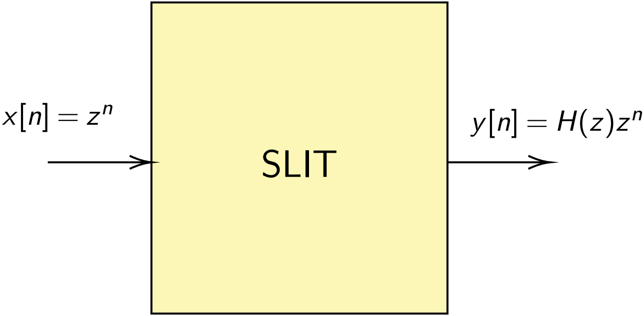
$$y[n+2]-6y[n+1]+9y[n]=5x[n+1]+2x[n]$$

- Notação $py[n]=y[n+1]$ (operador avanço), $p^2y[n]=y[n+2]$

$$\underbrace{(p^2-6p+9)}_{D(p)}y[n]=\underbrace{(5p+2)}_{N(p)}x[n]$$

$D(p)$: polinômio mônico (coeficiente do termo de maior grau igual a 1)

SLIT: Auto-função z^n



$$z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad H(z) \in \mathbb{C}$$

$H(z)$: ganho complexo equivalente ou função de transferência (discreta)

$H(z)$ a partir da auto-função z^n

- Exemplo

$$y[n+2]+5y[n+1]+4y[n]=3x[n+1]-7x[n], \quad (p^2+5p+4)y=(3p-7)x$$

$$x[n]=z^n \quad \Rightarrow \quad y[n]=H(z)z^n$$

$$(z^2+5z+4)H(z)z^n=(3z-7)z^n$$

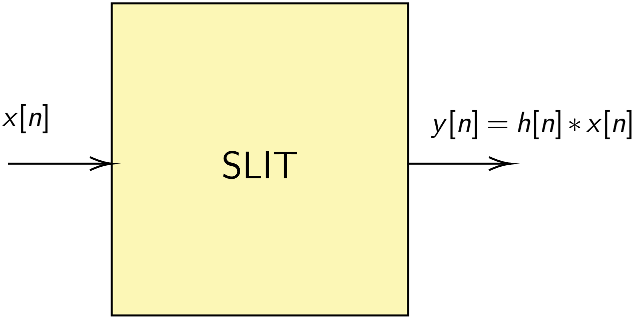
$$\Rightarrow \quad H(z)=\frac{3z-7}{z^2+5z+4}$$

- No caso geral

$$H(z)=\left.\frac{N(p)}{D(p)}\right|_{p=z}$$

SLIT: Teorema

- A saída $y[n]$ do SLIT para uma entrada $x[n]$ é dada pela convolução da entrada com a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema.



$h[n]$: resposta ao impulso

- Portanto, para $x[n] = z^n$, tem-se

$$
\begin{aligned}
y[n] = h[n] * z^n &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{n-k} \\
&= z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k} \\
&= z^n \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k}}_{= H(z), \quad z \in \Omega_h}
\end{aligned}
$$

- Transformada (bilateral) Z da função resposta ao impulso

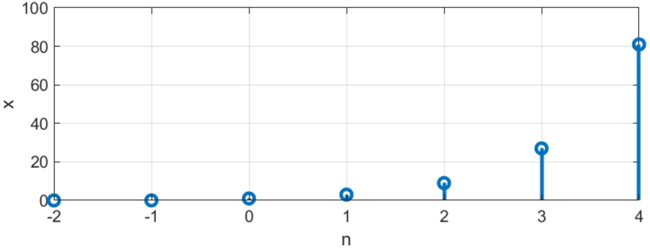
$$
H(z) = \mathscr{Z}\{h[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k}, \quad z \in \Omega_h
$$

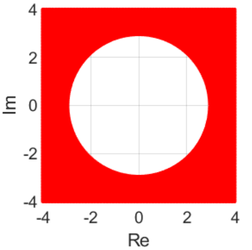
Exemplo

- A transformada Z de $x[n] = 3^n u[n]$ e o domínio de existência associado Ω_x podem ser computados a partir da definição.

$$
\begin{aligned}
X(z) = \mathscr{Z}\{x[n]\} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 3^k u[k] z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (3/z)^k \\
&= \frac{1}{1-(3/z)}, \quad |3/z| < 1 \\
&= \frac{z}{z-3}, \quad |z| > 3
\end{aligned}
$$

$$\mathscr{Z}\{3^n u[n]\} = \frac{z}{z-3}, \quad |z| > 3$$





$H(z)$ — função de transferência

- A partir de uma equação a diferenças, p. ex.,

$$(p^2 - 3p + 5)y[n] = (2p - 9)x[n]$$

obtém-se (com o conceito de auto-função) a função de transferência $H(z)$

$$H(z) = \frac{2z - 9}{z^2 - 3z + 5}$$

porém o domínio de existência (associado à transformada Z da resposta ao impulso) depende de considerar-se a solução causal (que evolui de um ponto inicial, por exemplo, $n = 0$, para $n \to +\infty$) ou a anti-causal