Resolução comentada PR3 1s-2019:

Questão 1:

Definição presente nos slides cap (19).

Questão 2:

$$\dot{v} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$$

modos $\nearrow \lambda = 1$
$\searrow \lambda = 2$

Para testar se um modo é controlável ou não devemos analisar o rank da matriz

$$\begin{vmatrix} A - \lambda I & b \end{vmatrix}$$

Para $\lambda = 1$

$$\text{rank}\left(\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right) \rightarrow \text{rank} = 2$$

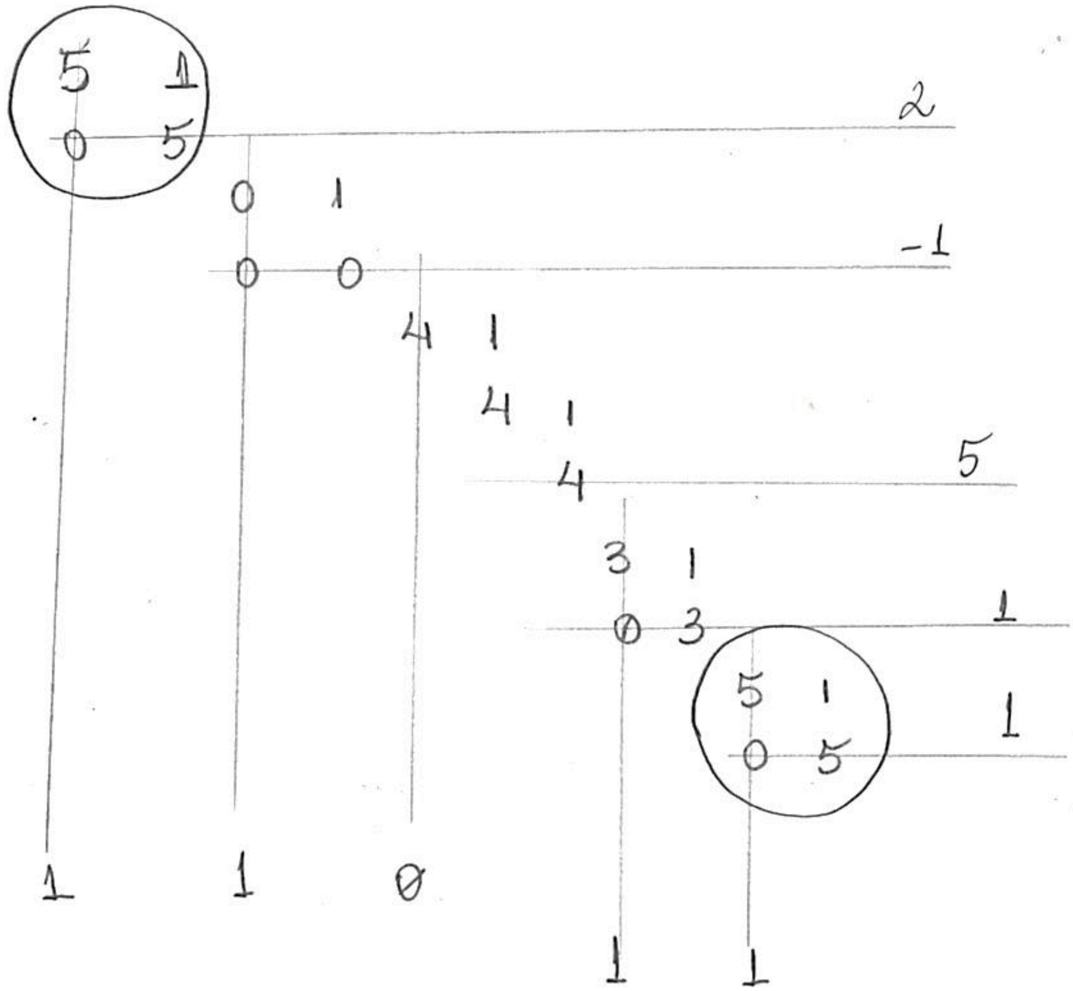
controlável

Para $\lambda = 2$

$$\text{rank}\left(\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right) \rightarrow \text{rank} = 1$$

não-controlável.

Questão 3:



→ O primeiro pressuposto para termos seja controlabilidade quer observabilidade é que tenhamos APENAS 1 bloco de Jordan p/ cada autovalor.

→ Nesse caso temos 2 blocos p/ $\lambda = 5$

Logo, NÃO OBSERVÁVEL E NÃO CONTROLÁVEL

Questão 4: sistema observável α, β?

$$\dot{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} v \qquad y = \underbrace{[\alpha \ \ \beta]}_{C} v$$

Montar a matriz de observabilidade

$$\text{Obsv.}(A, C) = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 3\alpha - 2\beta & \alpha \end{vmatrix} \rightarrow \text{rank} = 2$$

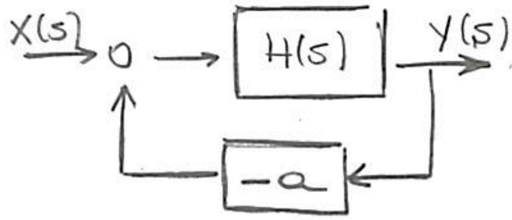
Para termos rank = 2 temos que ter linhas e colunas LI

$$[\alpha \neq \beta \neq 0]$$

$$\alpha^2 - \beta(3\alpha - 2\beta) \neq 0$$

↳ se $\alpha = 0 \rightarrow [2\beta \neq 0]$

Questão 5:



$$H(s) = \frac{5a}{s^2+10s+2a}$$

Sensibilidade do ganho DC $(s=0)$ p/ $a=1$
em malha fechada

$$G(s) = \frac{H(s)}{1+aH(s)} = \frac{5a}{s^2+10s+5a^2+2a}$$

sensibilidade

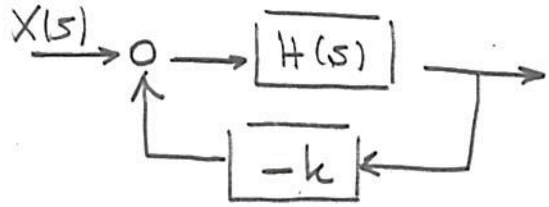
$$\left[\left(\frac{\partial G}{\partial a}\cdot\frac{a}{G}\right)\Big|_{s=0}\right]_{a=1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial a}\cdot\frac{a}{G} = \left.\frac{s^2+10s-5a^2}{s^2+10s+2a+5a^2}\right|_{s=0}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial a}\frac{a}{G}\right)\Big|_{s=0}\Big|_{a=1} = \boxed{-5/7}$$

Questão 6:

$$H(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 8s + 12}$$



BIBO estabilidade em malha fechada

$$G(s) = \frac{H(s)}{1 + kH(s)} = \frac{\dfrac{s^2 - s}{s^3 + 8s + 12}}{1 + k \cdot \dfrac{(s^2 - s)}{s^3 + 8s + 12}}$$

$$\frac{N(s)}{D(s)} \stackrel{!}{=} \frac{s^2 - s}{s^3 + ks^2 + s(8-k) + 12}$$

Para ser BIBO-estável D(s) deve possuir raízes c/ $Re(s) < 0$

$$D(s) = s^3 + ks^2 + s(8-k) + 12$$

$$\begin{array}{lll} p^3 & 1 & 8-k \\ p^2 & k & 12 \\ p^1 & \frac{8k - k^2 - 12}{k} & \\ p^0 & 12 & \end{array}$$

$k > 0$ e

$$\frac{8k - k^2 - 12}{k} > 0$$

$$-k^2 - 12 + 8k > 0$$

$$\Delta = 64 - 48 = 16$$

$$k = \frac{-8 \pm 4}{-2}$$

$k < 6$

$k > 2$

$$\therefore \boxed{6 > k > 2}$$

Questão 7:

A matriz A possui os seguintes blocos

- 1 bloco de dim. 1 $\lambda = \pm j$
- 1 bloco de dim. 1 $\lambda = \pm 3j$
- 1 bloco de dim 2. $\lambda = \pm 2j$

→ INSTÁVEL, pois o sistema possui um bloco c/ parte real nula com dimensão maior que 1

Questão 8:

$$A'P + PA + 1 4 I = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Precisamos achar P e avaliar se a matriz P é simétrica, única e definida positivo. Se for, então o SLIT é AS. ESTÁVEL

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$ → forçamos ser simétrico.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3p_1+2p_2 & -3p_2+2p_3 \\ p_1-4p_2 & p_2-4p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3p_1+2p_2 & p_1-4p_2 \\ -3p_2+2p_3 & p_2-4p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6p_1+4p_2 & -7p_2+p_1+2p_3 \\ p_1-7p_2+2p_3 & 2p_2-8p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -6p_1+4p_2 = -14 & + \\ -7p_2+p_1+2p_3 = 0 & (\times 6) \\ 2p_2-8p_3 = -14 \end{cases} \qquad \boxed{p_1 = 3} \qquad \boxed{p_2 = 1}$$

$$-38p^2+12p_3 = -14 \quad +$$

$$2p_2-8p_3 = -14 \quad (\times 19)$$

$$-140p_3 = -280$$

$$\boxed{p_3 = 2}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ $3 > 0$ e $\det(P) = 5 > 0$

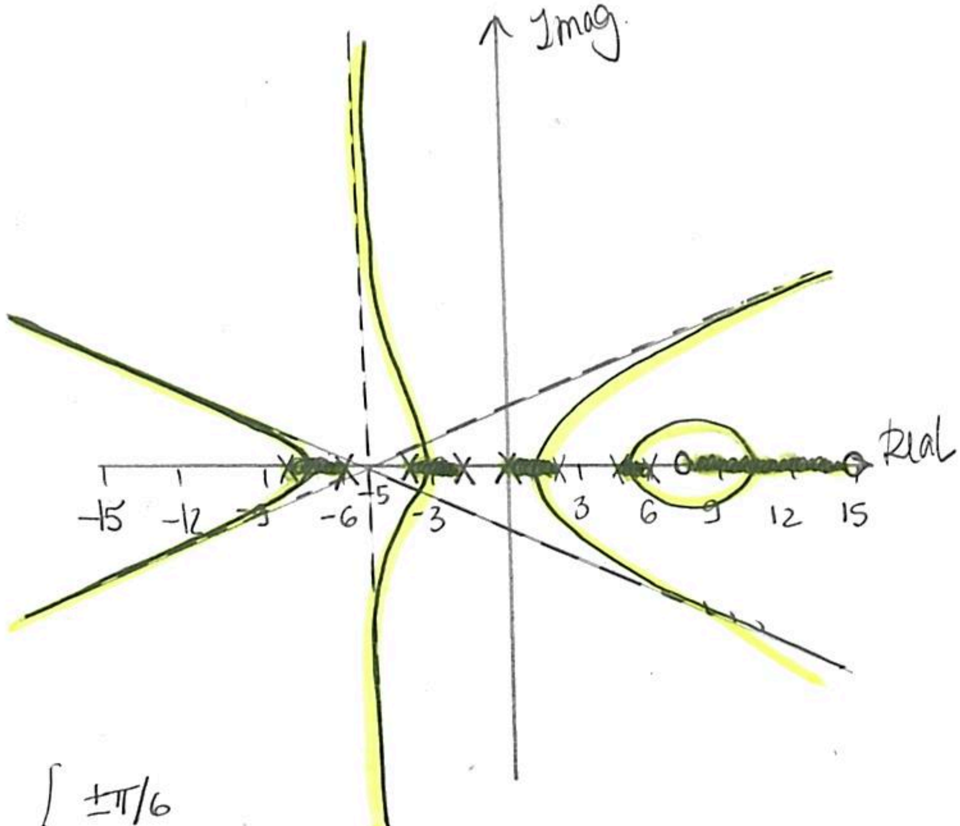
$\therefore$ definida positiva

Questão 9 :

pólos

$m = 8$

$$\begin{cases} s = -8 \\ s = -6 \\ s = -4 \\ s = -2 \\ s = 0 \\ s = 2 \\ s = 4 \\ s = 6 \end{cases}$$



zeros

$l = 2$

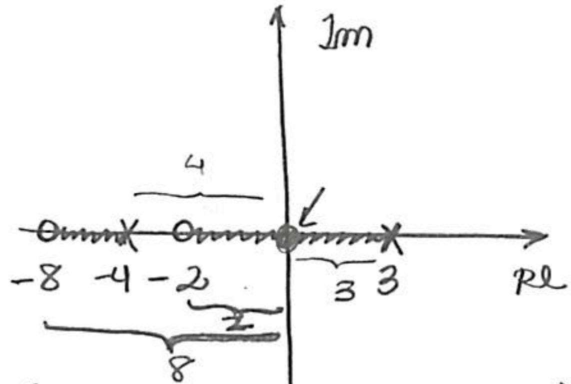
$$\begin{cases} s = 7 \\ s = 15 \end{cases}$$

$$\eta = m - l = 6 \quad \begin{cases} \pm \pi/6 \\ \pm \pi/2 \\ \pm \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\eta}\left(\Sigma(\lambda_i) - \Sigma(\gamma_i)\right) = \frac{1}{6}(-8 - 22) = \boxed{-5}$$

ponto de encontro dos assintotas

Questão 10:



k p/o cruzamento
c/ o eixo imaginário (nesse caso s = 0)

polos

$$k = \frac{\prod |(s-p_j)|}{\prod |(s-z_j)|}\Bigg|_{s=0} = \frac{|3||4|}{|8||2|} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

zeros