Resolução Comentada PR1 1º semestre 2019:

Questão 1:

$y_f(t) = ?$ para $x(t) = 1 + \exp(t)$

$$\dot{y} + 2y = \dot{x} + 5x$$

$$\hookrightarrow y(p+2) = (p+5)x$$

$$H(s) = \frac{s+5}{s+2}$$

→ **obs**: Para resolver esse exercício usaremos a definição de auto-função.

Auto-função: Um sinal de entrada é denominado auto-função de um sistema se a saída correspondente for igual ao sinal de entrada multiplicado por uma constante (em geral complexa).

Propriedade: O sinal e^{st}, s complexo pertencente ao domínio Ω_h, é uma auto-função p/ SLIT.

$$y(t) = e^{st} * h(t) = H(s)e^{st}$$

Voltando à questão

$$x(t) = 1 + e^{t} = e^{0t} + e^{t}$$

$e^{0t} \rightarrow s=0$ $\quad$ $e^{t} \rightarrow s=1$

$$\boxed{y_f(t) = 5/2 + 2e^{t}}$$

$$y_f(t) = e^{0t} * h(t) + e^{t} * h(t) = H(0).e^{0t} + H(1).e^{t}$$

Questão 2:

$\mathcal{L}\{x(t)\} = ?$ $\qquad x(t) = -t\, e^{2t} u(-t)$

Olhando p/ $x(t)$ conseguimos identificar as transformadas que precisamos:

Reversão no tempo $\quad \mathcal{L}\{x(-t)\} = X(-s) \quad -s \in \Omega_x \qquad (1)$

Derivada em s $\quad \mathcal{L}\{y(t) = t^m x(t)\} = (-1)^m \dfrac{d^m X(s)}{ds^m} \qquad (2)$

Exponencial $\quad \mathcal{L}\{e^{\lambda t} u(t)\} = \dfrac{1}{s-\lambda} \qquad Re(s-\lambda) > 0 \quad (3)$

Quando temos $u(-t)$ é um indicativo de "Reversão no tempo".

Primeiro revertemos $x(t)$ para o domínio conhecido em $u(t)$

$$x(-t) = t\,\underbrace{e^{-2t}u(t)}_{(3)} \xrightarrow{(2),(3)} \mathcal{L}\{x(-t)\} = (-1)^1 \frac{d\left(\frac{1}{s+2}\right)}{ds}$$

$$X(-s) = +\frac{1}{(s+2)^2} \qquad Re(s+2) > 0$$

$$\downarrow$$

$$X(s) = \frac{1}{(-s+2)^2} = \frac{1}{(s-2)^2} \rightarrow \boxed{X(s) = \frac{1}{(s-2)^2} \quad Re(s-2) < 0}$$

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$?

$$X(s) = \frac{8s+9}{(s-2)(s+3)} \qquad -3 < Re(s) < 2$$

Primeiro dividimos em frações parciais:

$$X(s) = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s+3)} \quad A = 5, \quad B = 3$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{5}{s-2} + \frac{3}{s+3} \qquad -3 < Re(s) < 2$$

Sabemos que $\underbrace{\mathcal{L}\{e^{\lambda t}u(t)\} = \frac{1}{s-\lambda}}_{\substack{Re(s-\lambda) > 0 \\ (1)}}$ e $\underbrace{\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}u(-t)\} = -\frac{1}{s+\lambda}}_{\substack{Re(s+\lambda) < 0 \\ (2)}}$

Uma vez dividido em frações parciais temos que analisar o domínio de existência Ωx

$-3 < Re(s) < 2$ → $Re(s-2) < 0$ → reversão no tempo ← Aplica-se (2)

$-3 < Re(s) < 2$ → $Re(s+3) > 0$ ← Aplica-se (1)

$$\boxed{x(t) = -5e^{2t}u(-t) + 3e^{-3t}u(t)}$$

Questão 4:

a) $Y(s) = ?$

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0 \qquad y(0), \dot{y}(0) \text{ dados}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} &= sX(s) - x(0) \\ \mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} &= s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \end{aligned}\right\} \text{ considerando essas transformadas.}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 2(sY(s) - y(0)) + 5Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2 + 2s + 5) = y(0)(s+2) + \dot{y}(0)$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{y(0)(s+2) + \dot{y}(0)}{s^2 + 2s + 5}} \qquad (1)$$

b) $y(0) = ?$ & $\dot{y}(0) = ? \longrightarrow y(t) = e^{-t}\underbrace{\cos(2t)u(t)}_{Y^+(s)}$

1°) Transformada de $y(t)$

$$Y^+(s) = \frac{s}{s^2 + 4} \rightarrow Y(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2) temos

$$\begin{cases} 2y(0) + \dot{y}(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow \dot{y}(0) = -1$$

$$\boxed{y(0) = 1 \ , \ \dot{y}(0) = -1}$$

Transf. utilizadas

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t)u(t)\} = \frac{s}{s^2+\beta^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}x(t)\} = X(s+a)$$

Questão 5:

$y_u(t) = ?$ (condições iniciais nulas) $\nearrow y(0) = \dot{y}(0) = 0$ $\searrow x(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 8\ddot{x} + 13\dot{x} + 25x$$

$$s^2 Y(s) + 2s Y(s) + 5Y(s) = 8s^2 X(s) + 13s X(s) + 25 X(s)$$

$$(s^2 + 2s + 5)\, Y(s) = (8s^2 + 13s + 25)\, X(s)$$

$$Y(s) = \frac{8s^2 + 13s + 25}{s^2 + 2s + 5} X(s)$$

Resposta ao degrau $X(s) = \frac{1}{s}$

$$Y_u(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{8s^2 + 13s + 25}{(s+1)^2 + 4}$$

$\nearrow s^2 : 8$
$\rightarrow s : 13$
$\searrow$ cte : 25

Frações Parciais

$$Y_u(s) = \frac{\overset{5}{A}}{s} + \frac{Bs + C}{(s+1)^2 + 4}$$

$$= \frac{5(s^2 + 2s + 5) + Bs^2 + Cs}{s(s^2 + 2s + 25)}$$

$s^2 : 5 + B = 8 \rightarrow B = 3$

$s : 10\cancel{A} + C = 13 \rightarrow C = 3$

$$Y_u(s) = \frac{5}{s} + \frac{3(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$\boxed{y_u(t) = 5u(t) + 3\cos(2t)\, e^{-t} u(t)}$$

Transf. utilizadas

$\mathcal{L}\{\cos(\beta t) u(t)\} = \frac{s}{s^2 + \beta^2}$

$\mathcal{L}\{e^{-at} x(t)\} = X(s+a)$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{s+26}{s^3+6s^2+13s} \qquad Re(s) > 0$$

a) Valor inicial de $y(t)$

Def: $x(0^+) = \lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$

* se ograu do numerador = denominador
não existe valorinicial.

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} \cancel{s}\cdot\frac{s+26}{\cancel{s}(s^2+6s+13)}$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{s\cdot\left(1+\cancel{\frac{26}{s}}^{\,0}\right)}{s^2\left(1+\cancel{\frac{6}{s}}^{\,0}+\cancel{\frac{13}{s^2}}^{\,0}\right)}$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s} = 0$$

b) O Valor final de $y(t)$

Def: $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

* $X(s)$ possui no máximo um pólo em $s=0$ e todos os demais com parte real negativa.

$$\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s+26}{s(s^2+6s+13)} = 2$$

Questão 7:

$$y_f(t) = ? \longrightarrow x(t) = 5e^{-2t} \qquad H(s) = \frac{1}{s+2}$$

→ Nessa questão o método empregado na Questão 1 não pode ser aplicado, pois o modo próprio possui mesma raiz do modo forçado. Assim, resolveremos pelo método dos coeficientes a determinar.

$$H(s) = \frac{1}{s+2} \longrightarrow (p+2)y = x = 5e^{-2t}$$

$$(p+2)y = \underbrace{5e^{-2t}}_{} \quad (1)$$

$$\downarrow$$

$\alpha = -2$

$D(p) = p+2$

$\bar{D}(p) = p+2$

$\gamma = -2$

$y_f(t) = Ate^{-2t} \longleftarrow$ Como α e γ são iguais os modos para serem linearmente independentes temos que $y_f(t) = Ate^{-2t}$

$$\downarrow$$

Substituindo em (1)

$$(p+2)Ate^{-2t} = 5e^{-2t}$$

$$Ae^{-2t} - \cancel{2Ate^{-2t}} + \cancel{2Ate^{-2t}} = 5e^{-2t}$$

$$A = 5$$

$$\boxed{y_f(t) = 5te^{-2t}}$$

Questão 8 :

$$y(t) = ? \qquad p(p-2)\,y = 4 \quad (1) \qquad y(0) = 10$$
$$\dot{y}(0) = 0$$

Utilizando coeficientes a determinar

$$D(p) = p(p-2) \qquad \bar{D}(p) = p$$

$$\alpha = 0 \qquad \alpha = 2 \qquad \gamma = 0$$

ATENÇÃO
QUE TEMOS
RAÍZES IGUAIS

$$y(t) = \underbrace{A + Be^{2t}}_{D(p)} + \underbrace{Ct}_{\bar{D}(p)} \qquad (2)$$

$(2) \to (1)$

$$p(p-2)\left(A + Be^{2t} + Ct\right) = 4$$

$$-\cancel{4Be^{2t}} - 2C + \cancel{4Be^{2t}} = 4$$

$$C = -2 \longrightarrow y(t) = A + Be^{2t} - 2t \qquad (3)$$

Substituindo $y(0)$ e $\dot{y}(0)$ em (3)

$$\begin{cases} y(0) = 10 = A + B \rightarrow A = 9 \\ \dot{y}(0) = 0 = 2B - 2 \rightarrow B = +1 \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = -2t + e^{2t} + 9}$$

Questão 9:

a) Analisando a figura conclui-se que temos:

→ 1 pólo de ordem 2 na origem → $\phi = -180°$

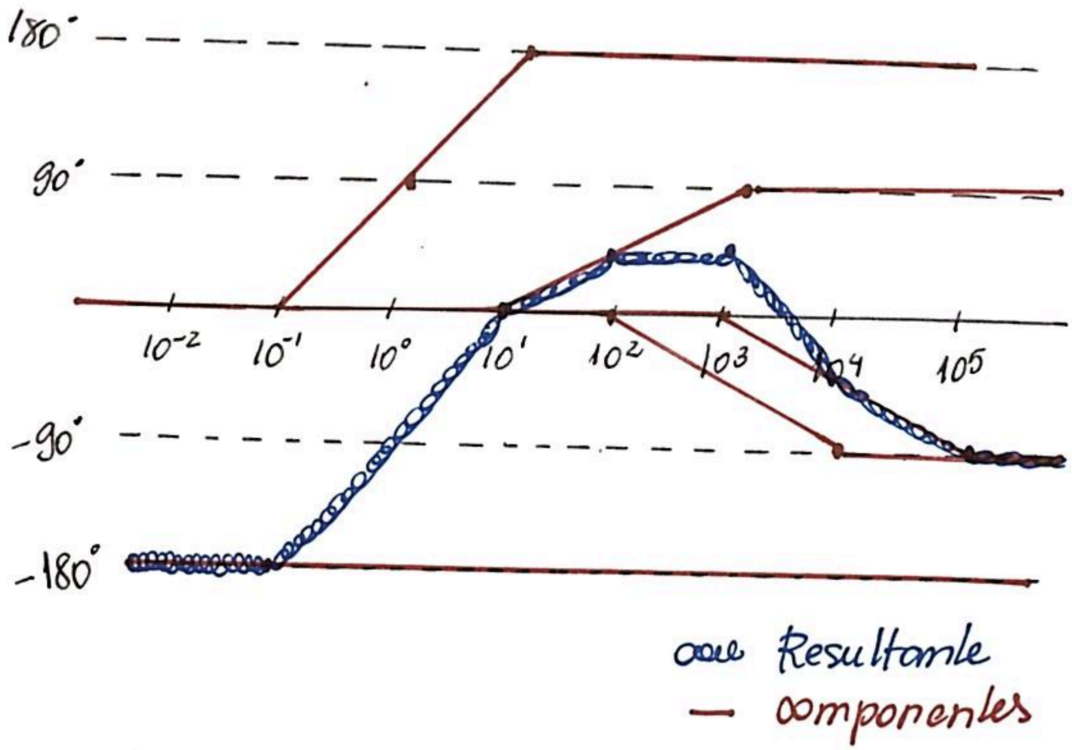
→ 1 zero em $\omega_c = 1$ → $\phi = 0° \rightarrow 180°$
de ordem 2

→ 1 zero em $\omega_c = 10^2$ → $\phi = 0° \rightarrow 90°$

→ 1 pólo em $\omega_c = 10^3$ → $\phi = 0° \rightarrow -90°$

→ 1 pólo em $\omega_c = 10^4$ → $\phi = 0° \rightarrow -90°$

IMPORTANTE: lembrando que é FASE MÍNIMA, então pólos e zeros com part real negativa.



b) $x(t) = 10\cos(3000t)$

$\omega = 3000$ → Olhando no gráfico $M_{dB} \times \omega$ para a frequência $\omega = 3000$ a amplitude $M_{dB} = -20\,dB$

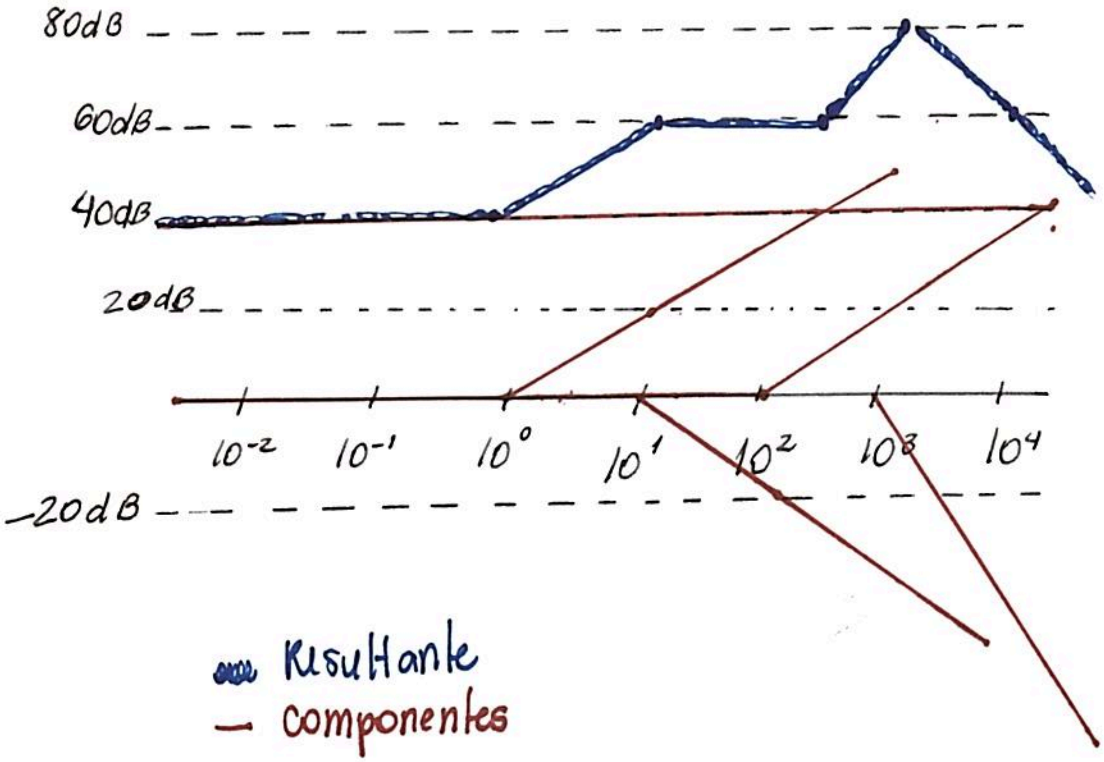
Assim, a saída será $x(t)$ atenuado de 0.1 → $y_p(t) = \cos(3000t)$

Questão 10:

a) Assíntotas do módulo

$$H(s) = \frac{10^7 (s+1)(s+100)}{(s+10)(s+1000)^2}$$

$$= \frac{(s+1)}{1} \cdot \frac{(s+100)}{100} \cdot \frac{10}{s+10} \cdot \frac{10^6}{(s+1000)^2} \cdot 10^2$$



b) Assíntotas da fase