Resolução Comentada PR1 1º sem 2018

Questão 1:

$y_f(t) = ?$ $\quad x(t) = 5 + 5\cos(5t)$

$$\ddot{y} + 4y = \ddot{x} + 9x \longrightarrow (p^2+4)y = (p^2+9)x$$

$$H(s) = \frac{s^2+9}{s^2+4}$$

→ Para encontrar a solução $y_f(t)$ usaremos a definição e propriedade de auto-função (uma explicação mais detalhada sobre auto-função está na resolução "PR1 1º sem 2019").

Escrevendo $x(t)$ em função de exponenciais

$$x(t) = 5e^{0t} + \frac{5}{2}\left(e^{j5t} + e^{-j5t}\right)$$

$$y_f(t) = 5e^{0t}H(0) + \frac{5}{2}\left(e^{j5t}H(j5) + e^{-j5t}H(-j5)\right)$$

$$= 5.9/4 + 5/2\left(e^{j5t}\frac{16}{21} + e^{-j5t}\frac{16}{21}\right)$$

$$= \frac{45}{4} + \frac{5.16}{21}\underbrace{\left(\frac{e^{j5t}+e^{-j5t}}{2}\right)}_{\cos(5t)}$$

$$= \boxed{45/4 + \frac{80}{21}\cos(5t)}$$

Questão 2:

$y_u(t) = ?$ (condições iniciais nulas)

$$\ddot{y} + \dot{y} = 3\ddot{x} + 7\dot{x} + 5x$$

Usando transformada de laplace

$$s^2 Y(s) + sY(s) = 3s^2X(s) + 7sX(s) + 5X(s)$$

$$Y(s)(s^2+s) = X(s)(3s^2+7s+5)$$

$$Y(s) = \frac{3s^2+7s+5}{s(s+1)} \cdot X(s)$$

Resposta ao degrau $X(s) = 1/s$

$$Y_u(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{3s^2+7s+5}{s(s+1)}$$

Separando em frações parciais

$$Y_u(s) = \frac{A^{=5}}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C^{=1}}{s+1}$$

$$= \frac{5(s+1) + Bs(s+1) + 1s^2}{s^2(s+1)}$$

$$s^2: \quad B + 1 = 3 \rightarrow B = 2$$

$$Y_u(s) = \frac{5}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s+1}$$

Das transformadas temos que:

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}u(t)\} = \frac{1}{s-\lambda}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!}u(t)\right\} = \frac{1}{s^{m+1}}$$

Assim,

$$Y_u(s) = \underbrace{\frac{5}{s^2}}_{5t\,u(t)} + \underbrace{\frac{2}{s}}_{2u(t)} + \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{e^{-t}u(t)}$$

$$\boxed{y_u(t) = (5t+2+e^{-t})u(t)}$$

Questão 3:

a) $Y(s) = ?$

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 0 \qquad y(0),\ \dot{y}(0) \text{ dados}$$

$$\text{Transformadas} \begin{cases} \mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2 Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0) \\ \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = s\,Y(s) - y(0) \end{cases}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 5(sY(s) - y(0)) + 6Y(s) = 0$$

$$Y(s)(s^2+5s+6) = y(0)(s+5) + \dot{y}(0)$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{y(0)(s+5) + \dot{y}(0)}{s^2 + 5s + 6}} \quad (1)$$

b) Para $y(0) = 5$ e $\dot{y}(0) = 0 \longrightarrow y(t) = ?$

substituindo $y(0) = 5$ e $\dot{y}(0) = 0$ em (1)

$$Y(s) = \frac{5(s+5)}{s^2+5s+6} = \frac{5(s+5)}{(s+2)(s+3)}$$

Frações Parciais

$$Y(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \qquad A = 15 \quad B = -10$$

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\mu(t)\} = \frac{1}{s-\lambda}$$

$$\boxed{y(t) = \left(15e^{-2t} - 10e^{-3t}\right)\mu(t)}$$

Questão 4:

Analisando a figura conclui-se que

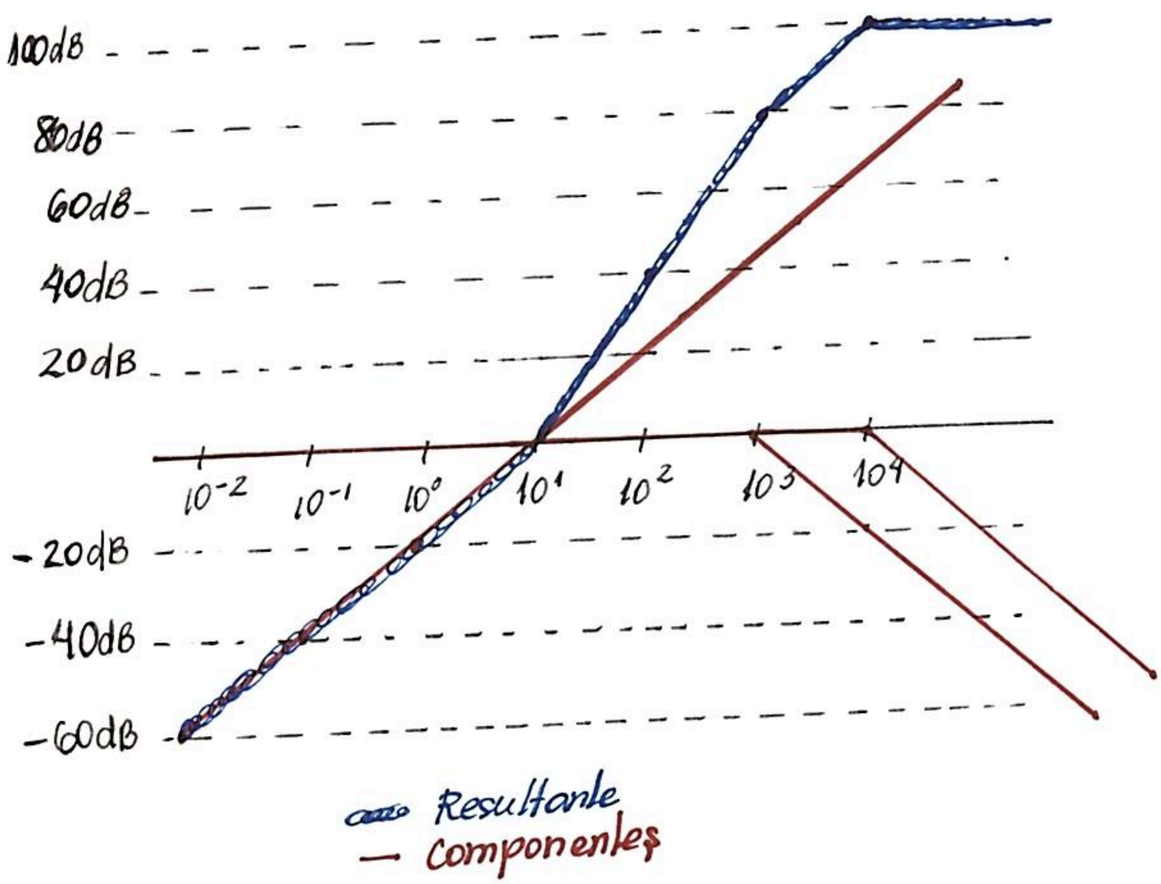
→ 1 zero na origem $\phi = 90°$

→ 1 zero em $\omega_c = 10$ $\phi\ 0 \to 90°$

→ 1 polo em $\omega_c = 1000$ $\phi\ 0 \to -90°$

→ 1 pólo em $\omega_c = 10000$ $\phi\ 0 \to -90°$

a) em $\omega = 0.01$ modulo é $-60dB$



b) $y_f(t)$ para $x(t) = 100\cos(\underbrace{10^4}_{\omega} t)$

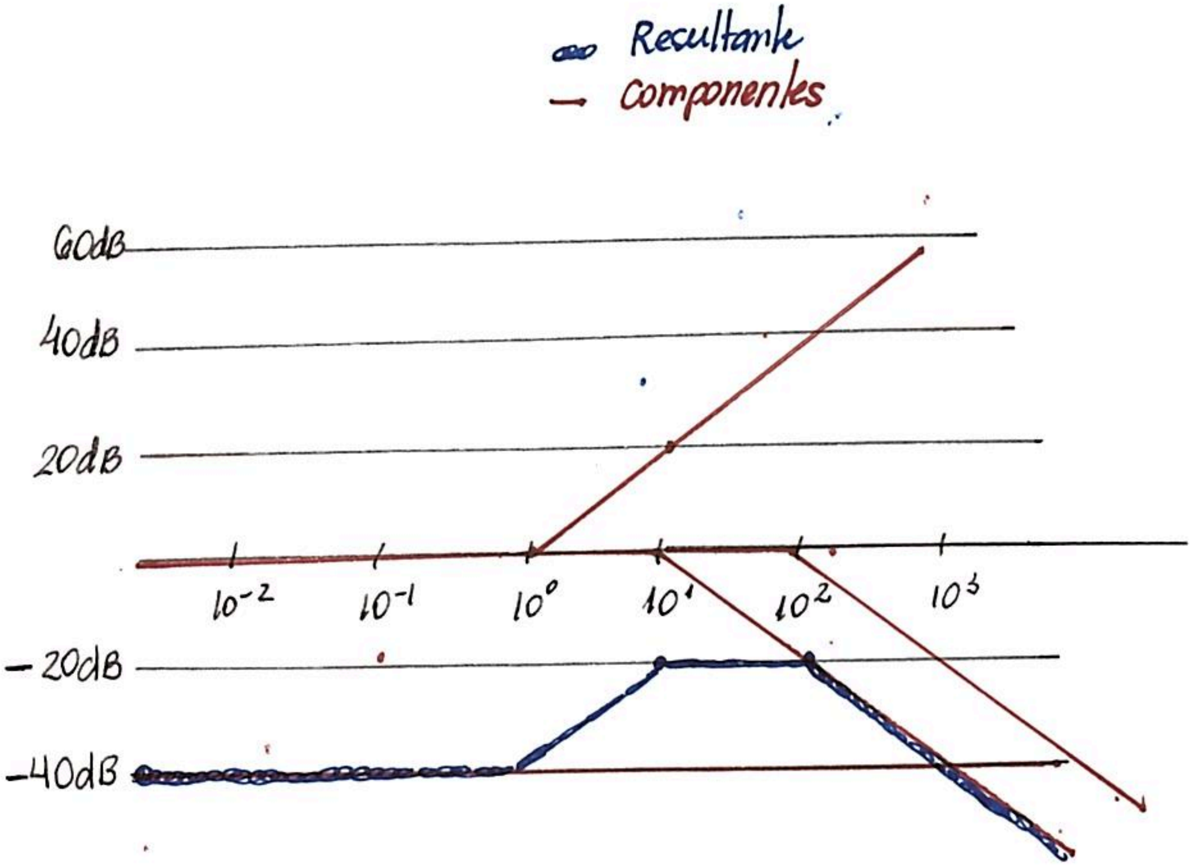
Olhando módulo e fase p/ $\omega = 10^4$ temos

$$\left.\begin{array}{l} M_{dB} = 100dB \cong 10^5 \\ \phi = 45° \end{array}\right\} \boxed{y_f(t) = 100 \cdot 10^5 \cos(10^4 t + 45°)}$$

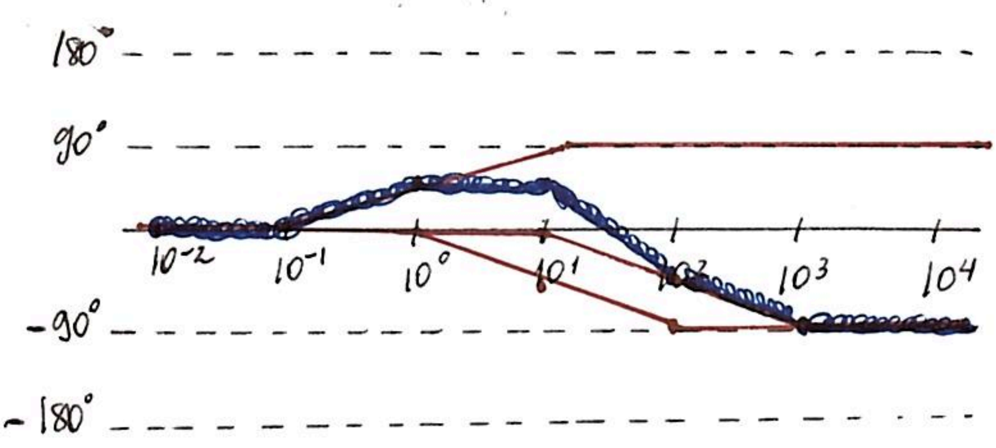
Questão 5:

a) Assíntotas do módulo

$$H(s) = \frac{10(s+1)}{(s+10)(s+100)} = \underbrace{\frac{s+1}{1}}_{0 \to 90^\circ} \cdot \underbrace{\frac{10}{s+10}}_{0 \to -90^\circ} \cdot \underbrace{\frac{100}{s+100}}_{0 \to -90^\circ} \cdot \underbrace{\frac{1}{100}}_{0^\circ}$$



b) Assíntotas da fase



Questão 6:

$$y_f(t) = ? \longrightarrow x(t) = t$$

$$h(t) = (5e^{-t} - 3e^{-2t})\,u(t)$$

Transformadas:

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}u(t)\} = \frac{1}{s-\lambda}$$

$$H(s) = \frac{5}{(s+1)} - \frac{3}{s+2} = \frac{5(s+2)-3(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{2s+7}{(s+1)(s+2)} \longrightarrow (p+1)(p+2)\,y = (2p+7)\,x$$

$$D(p) = (p+1)(p+2)$$

$$\alpha = -1 \quad \alpha = -2$$

$$x(t) = t \longrightarrow \bar{D}(p) = p^2$$

$\gamma = 0$ multiplicidade 2

$$y_f(t) = A + Bt$$

$$\underbrace{(p+1)(p+2)}_{p^2+3p+2}(A+Bt) = (2p+7)\,t$$

$$3B + 2A + 2Bt = 2 + 7t \quad \begin{cases} 3B + 2A = 2 \rightarrow A = -17/4 \\ 2B = 7 \rightarrow B = 7/2 \end{cases}$$

$$\boxed{y_f(t) = -17/4 + 7/2\,t}$$

Questão 7:

Equação diferencial homogênea e cond. iniciais que produzem

$$y(t) = 2e^{-t} + t^2$$

Modos proprios $\nearrow 2e^{-t} \rightarrow \alpha = -1$

$\searrow t^2 \rightarrow \alpha = \emptyset$ mult. 3

$$\boxed{\underbrace{(p+1)\,p^3}_{D(p)}\, y = \emptyset}$$

$D(p) \longrightarrow y(t) = A + Bt + Ct^2 + De^{-t}$

como temos 4 incógnitas (A, B, C e D) são necessárias 4 condições iniciais.

$\boxed{y(0) = 2}$, $\dot{y}(t) = -2e^{-t} + 2t$,

$\boxed{\dot{y}(0) = -2}$

$\ddot{y}(t) = 2e^{-t} + 2 \rightarrow \boxed{\ddot{y}(0) = 4}$

$\dddot{y}(t) = -2e^{-t} \rightarrow \boxed{\dddot{y}(0) = -2}$

Questão 8:

$$y(t) = ? \longrightarrow \underbrace{p(p+2)}_{D(p)} y = 8t \qquad y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 10$$

$D(p)$: $\alpha = 0$, $\alpha = -2$

$\hookrightarrow \bar{D}(p) = p^2 \rightarrow \gamma = 0$ mult. 2

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y_h(t) = A + Be^{-2t} \qquad y_p(t) = Ct + Dt^2$$

$$\underbrace{p(p+2)}_{p^2+2p} \underbrace{(Ct + Dt^2)}_{y_f(t)} = 8t$$

$$2C + 4Dt + 2D = 8t$$

$$4D = 8 \rightarrow D = 2$$

$$2C + 2D = 0 \rightarrow C = -2$$

$$y(t) = A + Be^{-2t} - 2t + 2t^2 \quad (1)$$

substituindo $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 10$

$$y(0) = A + B = 0 \longrightarrow \boxed{A = 6}$$

$$\dot{y}(t) = -2Be^{-2t} - 2 + 4t$$

$$\hookrightarrow \dot{y}(0) = -2B - 2 = 10$$

$$\hookrightarrow \boxed{B = -6}$$

$$\boxed{y(t) = 6 - 2t + 2t^2 - 6e^{-2t}}$$

Questão 9:

a) $Y(z) = ?$

$$y[n+2] - 2y[n+1] - 3y[n] = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow y[0] = -3 \\ \searrow y[1] = -17 \end{matrix}$$

Transformadas necessárias:

$$\mathcal{Z}\{y[n+2]\} = z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1]$$

$$\mathcal{Z}\{y[n+1]\} = zY(z) - zy[0]$$

$$\mathcal{Z}\{y[n]\} = Y(z)$$

Substituindo temos:

$$z^2Y(z) - z^2\underbrace{y[0]}_{-3} - z\underbrace{y[1]}_{-17} - 2\left(zY(z) - z\underbrace{y[0]}_{-3}\right) - 3Y(z) = 0$$

$$Y(z)\left(z^2 - 2z - 3\right) = -3z^2 - 17z + 6z$$

$$\downarrow = -3z^2 - 11z$$

$$\boxed{Y(z) = \frac{-3z^2 - 11z}{z^2 - 2z - 3}}$$

b) $y[n] = ?$

$$Y(z) = \frac{-3z^2 - 11z}{(z^2 - 2z - 3)} = \frac{-3z^2 - 11z}{(z+1)(z-3)}$$

→ Frações Parciais

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-3z - 11}{(z+1)(z-3)} = \frac{A^{=2}}{(z+1)} + \frac{B^{=-5}}{(z-3)}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{(z+1)} - \frac{5z}{(z-3)}$$

- Transformada $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \frac{z}{z-a}$

$$\boxed{y[n] = \left(2(-1)^n - 5(3)^n\right) u[n]}$$

Questão 10:

a) $y_f[n] = ?$

$$\underbrace{(p^2+3p+2)}_{(p+1)(p+2)} y[n] = (-2)^n \quad [1]$$

$(p+1)(p+2) \rightarrow \alpha = -1 \quad \alpha = -2$

$(-2)^n \rightarrow \gamma = -2$

$\alpha = -2$, $\gamma = -2$ → "raízes comuns"

$$y_f[n] = An(-2)^n \quad [2]$$

$[2] \longrightarrow [1]$

$$(p^2+3p+2)\, An(-2)^n = (-2)^n$$

$$A(n+2)(-2)^{n+2} + 3(n+1)A(-2)^{n+1} + 2An(-2)^n = (-2)^n$$

$$4A(n+2)(-2)^n - 6A(n+1)(-2)^n + 2An(-2)^n = (-2)^n$$

$$n(\underbrace{\cancel{4A-6A+2A}}_{0})(-2)^n + (8A-6A)(-2)^n = (-2)^n$$

$$2A = 1 \rightarrow \boxed{A = 1/2}$$

$$\boxed{y_f[n] = 1/2\, n(-2)^n}$$

b) $y[n] = ? \longrightarrow y[n] = y_h[n] + y_f[n]$

$\uparrow$ já temos

$$y_h[n] = B(-2)^n + C(-1)^n$$

$$y[n] = B(-2)^n + C(-1)^n + 1/2\, n(-2)^n$$

Substituindo as condições iniciais $y[0] = 0$ e $y[1] = 0$

$$y[0] = 0 = B + C$$
$$y[1] = 0 = -2B - C + 1/2 \cdot (-2)$$

$+$

$$+B = 1/2 \cdot (-2)$$

$$\boxed{B = -1} \rightarrow \boxed{C = 1}$$

$$\boxed{y_{total}[n] = -(-2)^n + (-1)^n + 1/2\, n(-2)^n}$$