**Nome:** ........................................................ **RA:** .................

**Obs.:** Resolva as questões e justifique as respostas nas folhas de papel almaço, copiando o resultado no espaço apropriado das folhas de questões.

**1ª Questão:** Determine os valores de $a$ e $b$ para os quais o sistema abaixo deixa de ser controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} x$$

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |

**2ª Questão:** Determine os autovalores associados aos modos observáveis e não observáveis, controláveis e não controláveis (justifique) para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} v, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 5)$$

**3ª Questão:** O sistema abaixo: a) É controlável? b) É observável? Justifique.

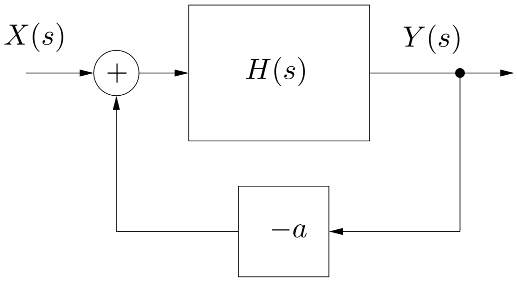
$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

**4ª Questão:** Determine o número de raízes do polinômio $D(p)$ com parte real positiva.

$$D(p) = p^5 + p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 5p + 2$$

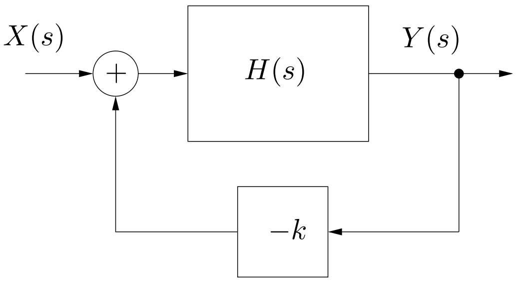
**5ª Questão:** Determine a sensibilidade do ganho DC ($s = 0$) do sistema em malha fechada em função do parâmetro $a$, para $a = 1$

$$H(s) = \frac{2s + 5a}{s^2 + as + 2a}$$




**6ª Questão:** Determine o intervalo para $k$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^2 + s + 5}{s^3}$$



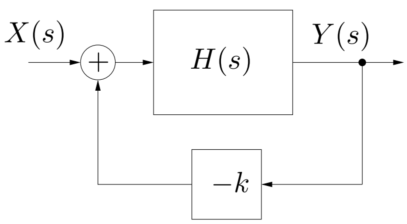

**7ª Questão:** O sistema linear invariante no tempo dado abaixo é estável, assintoticamente estável ou instável? Justifique

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} v$$

**8ª Questão:** Certifique a estabilidade assintotica da origem e determine o domínio de estabilidade $\Omega$ (isto é, o conjunto no espaço de estados, em termos do parâmetro $\beta$) utilizando a função de Lyapunov $\psi(v) = v^2$ para

$$\dot{v} = 2\beta v^3 - v, \quad \beta > 0, v \in \mathbb{R}$$

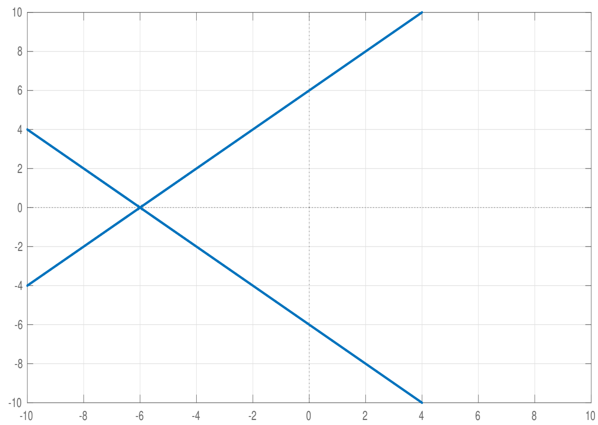
**9ª Questão:** Considere o sistema realimentado mostrado na figura com




$$H(s) = \frac{(s+4)(s-1)^2}{(s+5+j3)(s+5-j3)(s+2)(s-7)^2}$$

Esboce (nas folhas de papel almaço) o lugar das raízes (eixo real e assíntotas) para o sistema realimentado, determinando o ponto de encontro das assíntotas

**10ª Questão:** No lugar das raízes da figura (quatro polos em $-6$), determine o valor de $k$ no cruzamento com o eixo imaginário em $+j6$.



$M_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log M(\omega)$ sendo log o logaritmo na base 10

**Lyapunov:** Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio $\Omega$ contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \;\; , \;\; \psi(v) > 0 \; \forall v \in \Omega - \{0\} \;\; \text{e} \;\; \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \; \forall v \in \Omega - \{0\}$$

**Lyapunov (SLIT):** A solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -Q$, $\forall Q = Q' > 0$, é única, simétrica e definida positiva SSE todos os autovalores da matriz $A$ tiverem parte real negativa ($\equiv$ assintoticamente estável)

**Controlabilidade e Observabilidade:** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Controlável se e somente se:

$$rank\big( \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \big) = n, \quad \text{ou} \;\; rank\big( \begin{bmatrix} A - \lambda I & b \end{bmatrix} \big) = n, \quad \forall \lambda \text{ autovalor}$$

Observável se e somente se:

$$rank\left( \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n, \quad \text{ou} \;\; rank\left( \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ c \end{bmatrix} \right) = n, \quad \forall \lambda \text{ autovalor}$$

Decomposição canônica: $\bar{v} = Pv$

Se *rank* de $\text{Ctrb}(A, b) = r < n$, $P^{-1}$ é formada por colunas de 1 a $r$ LI de $\text{Ctrb}(A, b)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x \;\; , \;\; y = \begin{bmatrix} \bar{c}_c & \bar{c}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Se *rank* de $\text{Obsv}(A, c) = r < n$, $P$ é formada por linhas de 1 a $r$ LI de $\text{Obsv}(A, c)$ mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x \;\; , \;\; y = \begin{bmatrix} \bar{c}_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Sensibilidade de $f(x, y)$ em relação a $x$: $\dfrac{x}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x}$

Lugar das Raízes: $1 + kH(s) = 0$, $H(s) = N(s)/D(s) \;\Rightarrow\; D(s) + kN(s) = 0$

$$D(s) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r s^r \; , \; \alpha_m = 1 \;\; , \;\; N(s) = \sum_{r=0}^{\ell} \beta_r s^r$$

1) Simetria em relação ao eixo real.

2) Os polos e os zeros (finitos) de malha aberta fazem parte do lugar das raízes para, respectivamente, $k = 0$ e $k \to +\infty$.

3) Condição de fase: $\displaystyle\sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) = \pi$

sendo $\phi_r(s) = \angle(s - \lambda_r)$ o ângulo do vetor do pólo $\lambda_r$ até o ponto $s$ do lugar das raízes e $\varphi_r(s) = \angle(s - \gamma_r)$ o ângulo do vetor do zero $\gamma_r$ até o ponto $s$ do lugar das raízes.

4) Condição de módulo: $\displaystyle k = \Big(\prod_{r=1}^{m} |s - \lambda_r|\Big) / \Big(\prod_{r=1}^{\ell} |s - \gamma_r|\Big)$

5) Eixo real: O lugar das raízes no eixo real está sempre à esquerda de um número ímpar de polos e zeros reais.

6) Ângulo de partida dos polos: $\displaystyle \phi_i(s)\Big|_{s \approx \lambda_i} = \pi + \sum_{r=1}^{\ell} \varphi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^{m} \phi_r(s)$

7) Ângulo de chegada aos zeros: $\displaystyle \varphi_i(s)\Big|_{s \approx \gamma_i} = \sum_{r=1}^{m} \phi_r(s) - \sum_{r=1, r \neq i}^{\ell} \varphi_r(s)$

8) O número de assíntotas $\eta$ é igual ao número de zeros no infinito, isto é, $\eta = m - \ell$

9) Ângulos das assíntotas: $\dfrac{\pi(1 + 2r)}{m - \ell} \;\; , \;\; \beta_\ell > 0 \;\; , \;\; r \in \mathbb{Z}$

10) Encontro das assíntotas ($\eta \geq 2$): no eixo real no ponto $\displaystyle \frac{1}{\eta}\left( \sum_{r=1}^{m} \text{Re}(\lambda_r) - \sum_{r=1}^{\ell} \text{Re}(\gamma_r) \right)$

11) Cruzamento com o eixo real: Os pontos do lugar das raízes de chegada ou partida do eixo real, quando existem, satisfazem a equação $N(s)\dot{D}(s) = D(s)\dot{N}(s)$

12) Cruzamento com o eixo imaginário: ocorrem em $s = \pm j\omega$, com $\omega \geq 0$, solução de $D(s) + kN(s) = 0$