1ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{-z^2}{(z+1)(z+2)}, \quad 1 < |z| < 2$$

$$X(z) = \frac{-z^2}{(z+1)(z+2)} = X(z) = \frac{z}{z+1} - \frac{2z}{z+2}, \quad x[n] = (-1)^n u[n] + 2(-2)^n u[-n-1]$$

2ª Questão: Determine o valor inicial $x[0]$ e o valor final $\lim_{n\to+\infty} x[n]$ da sequência cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{56z^3 - 58z^2 + 17z}{(z-1)(2z-1)(4z-1)}, \quad |z| > 1$$

$$x[0] = \lim_{|z|\to+\infty} X(z) = 7, \quad x[+\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = 5$$

3ª Questão: Determine, para a distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{X}$, cuja transformada Z é

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-7}{z-8}, \ |z| < 8$$

a) $\Pr\{\mathbb{X} = 0\} = 7/8$ b) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\} = 7/64$

c) $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right) \frac{-7}{z-8}\Big|_{z=1} = \frac{7}{(z-8)^2}\Big|_{z=1} = \frac{1}{7}$

4ª Questão: a) Determine $Y(z)$, isto é, a transformada Z da solução causal $y[n]$ da equação a diferenças abaixo em termos de $y[0]$ e $y[1]$

$$y[n+2] + 7y[n+1] + 12y[n] = 0$$

b) Determine a solução $y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ para $y[0] = 1, y[1] = 1$

$$Y(z) = \frac{z^2 y[0] + z(7y[0] + y[1])}{(z+3)(z+4)}, \quad y[n] = \big(5(-3)^n - 4(-4)^n\big)u[n]$$

5ª Questão: Determine uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais que produzem como solução a sequência

$$y[n] = (1 + 2^n)^2$$

$$y[n] = 1 + 2(2)^n + 2^{(2n)} = 1 + 2(2)^n + 4^n$$

$$(p-1)(p-2)(p-4)y[n] = (p^3 - 7p^2 + 14p - 8)y[n] = 0, \ y[0] = 4, \ y[1] = 9, \ y[2] = 25$$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema abaixo para $x = 1$

$$\dot{v} = v(v^2 - x), \quad v \in \mathbb{R}$$

$$(0),\ (-1),\ (1)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio tenha-se

$$\dot{v} = Av + bx$$

caracterizando o comportamento como instável ou assintoticamente estável em cada ponto

$$A = [3v^2 - x],\ b = [-v]$$

$$(0) : A = [-1], b = [0] \text{ (ass. est.)}, \quad (-1) : A = [2], b = [1] \text{ (inst.)}, \quad (1) : A = [2], b = [-1] \text{ (inst.)}$$

7ª Questão: Determine uma realização (A, b, c, d) para o sistema linear invariante no tempo descrito pela equação diferencial

$$\dddot{y} - 6\ddot{y} - 4\dot{y} + 2y = 3\dddot{x} - 8\ddot{x} - 7\dot{x} + 7x$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

8ª Questão: Determine a resposta ao impulso (condições iniciais nulas) para o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

$$H(s) = c(s\mathrm{I} - A)^{-1}b = \frac{5s + 2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{5(s+1)}{(s+1)^2 + 1} - \frac{3}{(s+1)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = \exp(-t)\big(5\cos(t) - 3\,\mathrm{sen}(t)\big)u(t)$$

9ª Questão: Determine um sistema linear autônomo (homogêneo), com matrizes reais, na forma de equação de estados dado por

$$\dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}\ ,\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0\ ,\ y = \bar{c}\bar{v}$$

que produza como saída a função $y(t) = \exp(5t)(1 + 2t + 4t^2)$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - A) = (\lambda - 2)^3$$

$$\mathrm{diag}(J_2(2), J_1(2)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$